

Année 1965

N° d'ordre : 154

# THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ 3<sup>e</sup> CYCLE

SPÉCIALITÉ CHIMIE APPLIQUÉE

PAR

**Alfred Jean FAUCHON**

Licencié ès sciences mathématiques

---

## CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA TORSION APPLICATION à un type d'Elastomère

---

Soutenue le 10 Septembre 1965, devant la Commission d'Examen.

---

MM. Ch. EYRAUD

Président

F. SALLES

J. GOLÉ

M. CHEVRETON

} Examineurs

---

LYON

Imprimerie BOSC Frères  
42, quai Gailleton, 42

---

1965



Année 1965

N° d'ordre : 154

# THÈSE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE LYON

pour obtenir

LE DIPLOME DE DOCTEUR DE SPÉCIALITÉ 3<sup>e</sup> CYCLE

SPÉCIALITÉ CHIMIE APPLIQUÉE

PAR

**Alfred Jean FAUCHON**

Licencié ès sciences mathématiques

---

## CONTRIBUTION A L'ÉTUDE DE LA TORSION APPLICATION à un type d'Elastomère

---

Soutenue le 10 Septembre 1965, devant la Commission d'Examen.

---

MM. Ch. EYRAUD

Président

F. SALLES

J. GOLÉ

M. CHEVRETON

}  
Examineurs

---

LYON

Imprimerie BOSC Frères  
42, quai Gailleton, 42

---

1965





UNIVERSITE DE LYON  
FACULTE DES SCIENCES

Doyens honoraires

MM. LONGCHAMBON, MOUSSA, GAUTHIER Henri

Professeurs honoraires

MM. LOCQUIN, de LARAMBERGUE, SOLLAUD, MENTZER, MOUSSA, JAFFARD,  
Henry EYRAUD, DEJARDIN, VIRET

Doyen

M. BRACONNIER

Assesseurs

MM. MESNARD, BOIDIN

Professeurs

|                |                                    |
|----------------|------------------------------------|
| MM. LONCHAMBON | Minéralogie                        |
| PRETTRE        | Chimie Industrielle                |
| COURTY         | Chimie-Physique                    |
| KUHNER         | Botanique                          |
| MALECOT        | Mécanique rationnelle et appliquée |
| PARIS          | Chimie Minérale                    |
| AUMERAS        | Chimie                             |
| COLONGE        | Chimie Organique                   |
| JANIN          | Physique Générale                  |
| FLANDRIN       | Géologie Appliquée                 |
| BERNARD        | Physique Industrielle              |
| DUFAY Jean     | Astronomie                         |
| NIGON          | Zoologie expérimentale             |
| GAUTHIER Henri | Géologie Générale                  |
| WAUTIER        | Zoologie                           |
| CHOPIN         | Chimie Biologique                  |
| CUEILLERON     | Chimie                             |
| BRACONNIER     | Calcul différentiel et intégral    |
| EYRAUD Charles | Chimie-Physique appliquée          |
| SARRAZIN       | Physique Nucléaire                 |
| BOIDIN         | Microbiologie et Mycologie         |
| PERES          | Physiologie                        |
| MESNARD        | Electronique                       |
| GRANDMONTAGNE  | Physique                           |

### Professeurs (suite)

|                    |                                       |
|--------------------|---------------------------------------|
| BOUTILLIER         | Minéralogie                           |
| LAFOUCRIERE        | Physique nucléaire théorique          |
| DREUX              | Chimie organique                      |
| TEICHNER           | Chimie industrielle                   |
| PAVANS DE CECCATTY | Zoologie                              |
| MERLIN             | Chimie analytique                     |
| DUFAY Maurice      | Physique de l'atmosphère              |
| LUBET              | Physiologie                           |
| PHILBERT           | Physique nucléaire                    |
| COHEN-ADAD         | Chimie                                |
| DAVID Louis        | Géologie générale                     |
| CHANEL             | Psychophysiologie                     |
| MAURY              | Méthodes mathématiques de la Physique |
| DEPRAZ             | Physique nucléaire                    |
| GAUTHIER Jean      | Chimie                                |
| GAUME              | Physique expérimentale                |

### Professeurs sans chaire

|               |                                    |
|---------------|------------------------------------|
| MM. FERON     | Mathématiques                      |
| LAFORGUE      | Physique                           |
| LEGAY         | Zoologie expérimentale S. P. C. N. |
| UZAN          | Physique S. P. C. N.               |
| CHENEVOY      | Géologie appliquée                 |
| GINET         | Zoologie                           |
| ASCH          | Physique                           |
| MICHEL Pierre | Minéralogie                        |
| DUCET         | Biologie végétale                  |
| Mle MAITROT   | Physique                           |
| MM. GEVIN     | Géologie générale                  |
| PONASSE       | Mathématiques                      |
| d'INCAN       | Physique                           |
| LEFEBVRE      | Mathématiques                      |
| PERNET        | Mathématiques                      |
| CHERY         | Physique                           |
| BERGEON       | Physique C. S. U.                  |
| Mle GAUTHERON | Chimie biologique                  |

### Maîtres de Conférences

|             |                       |
|-------------|-----------------------|
| Mme ERICSON | Physique générale     |
| MM. MARTEL  | Mécanique             |
| MATHIEU     | Mécanique des Fluides |
| ERBEIA      | Physique              |

Maîtres de Conférences (suite)

|                 |                      |
|-----------------|----------------------|
| DESCOTES        | Chimie organique     |
| PICARD Philippe | Mathématiques        |
| LEMOIGNE        | Botanique            |
| DEMARCO         | Géologie générale    |
| MICHEL Georges  | Biochimie            |
| LEBRETON        | Biologie végétale    |
| DAVID Jean      | Biologie animale     |
| TOUSSET         | Chimie propédeutique |
| FEUVRAIS        | Physique Electricité |
| PICARD Claude   | Mathématiques        |
| SCHMITT         | Physique M. P. C.    |
| LAURENT         | Chimie organique     |
| ROT             | Mathématiques        |
| BETHOUX         | Mathématiques        |
| Mle CALAIS      | Mathématiques        |
| M. GUSAKOW      | Physique             |
| Mle THOMAS      | Chimie minérale      |

Maître de Conférences adjoint

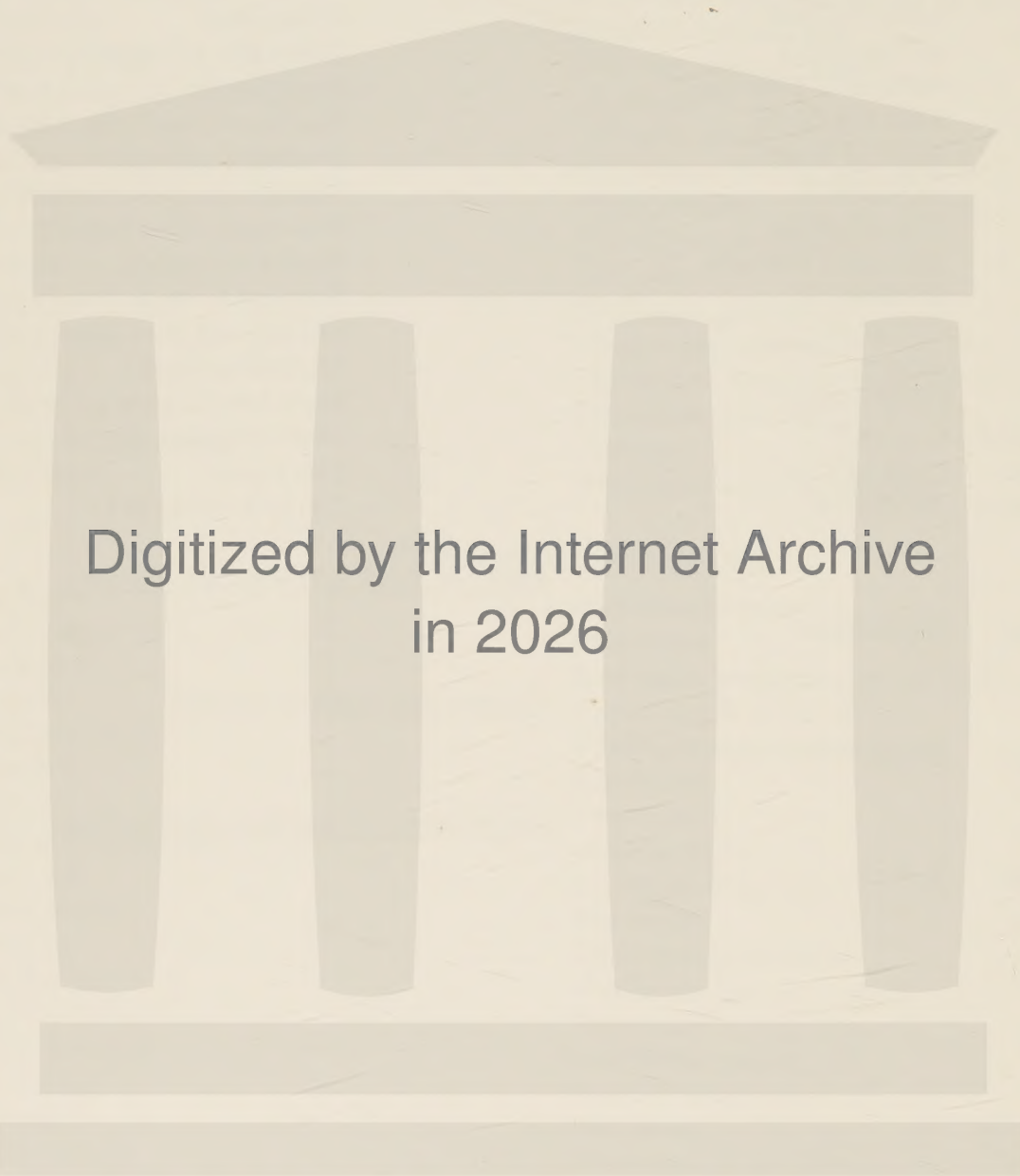
|            |        |
|------------|--------|
| M. PIERRON | Chimie |
|------------|--------|

Conseiller Administratif

|           |
|-----------|
| M. BURNET |
|-----------|

Secrétaire Principal Honoraire

|         |
|---------|
| M. ROUX |
|---------|



Digitized by the Internet Archive  
in 2026

[https://archive.org/details/IA41553406\\_0018](https://archive.org/details/IA41553406_0018)

A la mémoire de ma Mère  
et de mes Grands-Parents

A mon Père

A ma Femme

A ma Tante

A tous ceux qui me sont chers



## AVANT PROPOS

Ce travail a été réalisé dans le laboratoire de Résistance des Matériaux du Département de Mécanique de l'Institut National des Sciences Appliquées, sous la direction de Monsieur le Professeur Charles EYRAUD, Chef du Département. Qu'il trouve ici l'expression de notre profonde gratitude, pour le soutien et l'intérêt qu'il a portés à nos recherches, pour les éminents conseils qu'il nous a fournis, pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Je suis particulièrement heureux de pouvoir rendre hommage à la grande compétence de Monsieur SALLES, Maître de Conférences à l'INSA, Chef du service de Résistance des Matériaux, qui est à l'origine de cette étude, en a suivi pas à pas la progression et n'a cessé de me prodiguer son assistance et ses encouragements.

Je tiens à exprimer mes remerciements à Monsieur GOLÉ et à Monsieur CHEVRETON, Maîtres de Conférences, d'avoir bien voulu examiner ce travail et participer au jury de ma thèse.



## INTRODUCTION

La théorie de l'élasticité linéaire, développée depuis longtemps déjà et mise au point par de nombreux auteurs contemporains ne s'avère pas suffisante lorsque l'on considère les propriétés élastiques de certains matériaux. Ceux-ci, tels les hauts polymères, entre autres les élastomères, ne présentent plus par leurs propriétés élastiques, le caractère linéaire ; d'autre part, leurs déformations sont parfois très grandes et rendent caduques de nombreuses formules.

Afin de les étudier, il est nécessaire, soit de reprendre et modifier certains développements de l'élasticité linéaire basée sur la loi de Hooke, soit de partir d'une optique rhéologique.

Nos travaux ont été axés sur la première conception. Nous avons effectué des développements mathématiques pour apprécier l'ordre de grandeur des infiniments petits et pour nous rendre compte des conditions d'application des forces extérieures, notamment des couples antagonistes dans le phénomène de torsion. En fait, nous nous bornons ici à énoncer succinctement les résultats, une publication prochaine devant plus longuement s'y rapporter.

Nous avons pour des sections rectangulaires et elliptiques traité la résolution numérique de l'équation laplacienne  $\Delta\varphi = Cte$  qui régit le problème de la torsion. A cette fin nous avons élaboré les organigrammes et la programmation sur calculateur électronique.

Notre travail a ensuite porté sur la torsion des barres prismatiques en caoutchouc naturel

Auparavant, il s'est avéré nécessaire de faire une étude expérimentale du phénomène de traction. Celle-ci, compte tenu des propriétés très particulières des élastomères, nous a conduit à des développements de chimie macromoléculaire ; car l'interprétation de certains phénomènes spécifiques aux hauts polymers est un problème physico-chimique. Il est nécessaire de connaître aussi exactement que possible la structure des matériaux

Enfin, dans le dernier chapitre, la détermination du gau-chissement des sections a été résolue selon deux méthodes. La première consiste à déterminer les lignes de niveau, après une étude d'un moule au comparateur. La seconde est basée sur un processus optique relativement simple et rapide, étant donné la possibilité de travailler sur l'échantillon lui-même.

## CHAPITRE I

### RAPPELS ET THEOREMES GENERAUX DE L'ELASTICITE

#### 1-1 CONSIDERATIONS GENERALES SUR L'ELASTICITE

Nous avons repris la théorie de l'élasticité à partir des études de TIMOSHENKO et GOODIER (1), ainsi que de SOKOLNIKOFF (2). Nous avons également été conduits à consulter les travaux de l'HERMITE (3). Considérant le cas de déformations relativement grandes, il a été nécessaire de prêter beaucoup d'attention aux paramètres des déformations, et dans ce but, pousser les développements mathématiques jusqu'aux infiniments petits du second ordre.

Cette étude a été faite avec les notations de Lagrange qui consistent à déterminer une déformation unitaire à partir de la valeur initiale.

Ainsi  $\mathcal{E}^L = \frac{L_f - L_i}{L_i}$ . Car une autre conception est également possible.

C'est celle Eulérienne qui tient compte de la valeur finale.

Ainsi  $\mathcal{E}^E = \frac{L_f - L_i}{L_f}$ . PARKS et DURELLI (11) ont fait une intéressante

analyse différentielle des résultats théoriques auxquels conduisent ces deux bases, dans le cas de déformations importantes.

## 1-2 LOI DE HOOKE

Lorsqu'un matériau est soumis à un tenseur élastique, il subit des déformations qui sont, d'une part des variations de longueurs et d'autre part, découlant de celles-ci, des variations angulaires ou distorsions. Leurs composantes, relativement à un repère orthogonal à 3 dimensions, sont respectivement représentées par les systèmes (1) et (2) ci-dessous :

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \end{array} \right. \quad (2) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{array} \right.$$

Quant aux équations liant les composantes de la déformation unitaire à celles de la tension, elles ont été établies expérimentalement et sont connues sous le nom de lois de Hooke. Elles sont traduites par (3) et (4)

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{array} \right. \quad (4) \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \\ \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} \end{array} \right.$$

Dans ces 2 systèmes se trouvent introduites les 3 constantes E, G,  $\nu$ , qui sont successivement :

E : module d'élasticité longitudinale ou module d'Young .

G : module d'élasticité au cisaillement ou module de rigidité .

$\nu$  : coefficient de Poisson .

### 1-3 TENSEUR DES DEFORMATIONS. THEOREMES GENERAUX

#### 1-3-1 Tensions en un point

Suivant 3 axes rectangulaires Oxyz , les tensions à l'origine O sont représentées par le tenseur élastique t tel que :

$$t = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Ce tenseur symétrique du 2° ordre, est assimilable du point de vue calculs à une matrice symétrique du 3° ordre. Il est intéressant de déterminer les directions principales OXYZ, lesquelles sont réelles et forment un trièdre trirectangle direct,  $\tau_x$   $\tau_y$   $\tau_z$  désignant alors les valeurs propres, le tenseur élastique rapporté à ces directions principales s'écrit :

$$T = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Ainsi, relativement à un tel repère, le cisaillement disparaît, et si ABC est un plan quelconque dont la normale n a pour cosinus directeurs  $\alpha$   $\beta$   $\gamma$  , les composantes de la tension sur ce plan suivant les axes x, y, n sont :

$$\begin{cases} X = \alpha \sigma_x \\ Y = \beta \sigma_y \\ N = \alpha^2 \sigma_x + \beta^2 \sigma_y + \gamma^2 \sigma_z \end{cases}$$

### 1-3-2 Equations de compatibilité

Le problème essentiel, dans la théorie de l'élasticité est la détermination de l'état des tensions en un point quelconque d'un corps mis en charge sous l'action du tenseur élastique. Pour ce faire, il est nécessaire de résoudre le système différentiel traduisant l'état d'équilibre dans l'âme du matériau :

$$(5) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \end{array} \right.$$

Les équations (5) qui le forment doivent, par ailleurs, satisfaire les conditions aux limites. Le problème mathématique consiste donc à résoudre un système de 3 équations à 6 inconnues, en tenant compte des déformations subies, donc en introduisant les relations (1) et (2).

Le principe de résolution est long. Il est nécessaire de calculer, connaissant les 6 composantes de la déformation, les 3 fonctions  $u(xyz)$ ,  $v(xyz)$ ,  $w(xyz)$ , puis d'intégrer en écrivant les conditions des différentielles totales.

Cette méthode conduit à 6 conditions ou équations de compatibilité, à l'exclusion de toute autre relation. Nous les écrirons selon les 2 groupes (6) et (7) suivants :

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} \end{array} \right. \quad (7) \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right] \\ \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left[ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right] \\ \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} \left[ \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right] \end{array} \right.$$

## CHAPITRE II

### ETUDE THEORIQUE DE LA TORSION

#### 2-1 SOLUTION DU PROBLEME POUR DES BARRES A SECTION QUELCONQUE

##### 2-1-1 Cas particulier de sections circulaires

La première théorie de la torsion due à COULOMB, s'applique aux barres à section circulaire.



Figure 1

Elle implique que la contrainte, en chaque point de la section se réduise à un cisaillement dont la résultante, perpendiculaire au rayon, peut s'écrire :  $\tau = G \theta r$

Considérons, figure 1, la section d'une telle barre.

En décomposant  $\tau$  suivant les axes  $Ox$  et  $Oy$ , il vient :

$$\begin{cases} \tau_{yx} = -G\theta y \\ \tau_{xy} = G\theta x \end{cases}$$

La théorie admet que l'on a  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0$

Cette solution est la solution exacte du problème dans certaines conditions. En effet, les composantes de la contrainte étant toutes nulles ou fonctions linéaires des coordonnées, les équations de compatibilité (6) et (7) sont systématiquement vérifiées puisqu'elles dépendent des dérivées secondes. Quant aux équations de l'équilibre (5), elles sont satisfaites si les composantes de la force volumique sont nulles, c'est-à-dire s'il n'y a pas de force massique.

Quant aux déplacements  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , correspondant à cette mise en charge, ils sont fournis par les équations :

$$(8) \begin{cases} u = -\theta yz \\ v = \theta xz \\ w = Cx \end{cases}$$

La dernière de ces relations montre en particulier que toute section circulaire reste plane dans le phénomène de torsion.

## 2-1-2 Barres à section quelconque

La solution du problème est beaucoup plus difficile dans le cas de barres admettant une section quelconque. L'application des équations d'équilibre conduit au système

$$(9) \begin{cases} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Les relations de la première ligne montrent que la distribution des contraintes est indépendante de la section considérée, ce qui revient à dire que la répartition est la même pour toute section normale à l'axe de torsion  $Oz$ .

Mais pour aller plus avant dans l'étude de la torsion, il est nécessaire de faire de longs développements mathématiques, lesquels peuvent être basés sur des principes différents. En ce qui nous concerne, nous les avons repris suivant la conception de TIMOSHENKO (1). La méthode consiste à définir et déterminer la fonction  $\varphi = \varphi(x, y)$  susceptible de satisfaire les équations de compatibilité et les conditions aux limites. Nous nous sommes efforcés d'élucider le problème des conditions aux contours, notamment des conditions d'application des

couples antagonistes. Par ailleurs, voir référence (14), nous avons considéré l'aspect physique du problème ainsi que le processus de mise en oeuvre du matériau, et avons relié ces différentes considérations aux relations mathématiques. C'est à partir de telles remarques qu'il est possible de donner un sens véritable aux constantes d'intégration.

Certains chercheurs, tels DEUTCH (12) basent l'étude de la torsion sur la représentation conforme dans le plan complexe, tandis que d'autres, tels VILLAGIO (13) appuient leurs travaux sur une conception d'analyse tensorielle du tenseur élastique.

La fonction  $\varphi$  ainsi introduite doit satisfaire l'équation aux dérivées partielles :

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = C = -2G\theta_1$$

où C s'exprime en fonction du module de rigidité et de l'angle unitaire de torsion. La connaissance de  $\varphi(x,y)$  nous intéresse particulièrement par l'intermédiaire de ses dérivées partielles puisque celles-ci sont égales aux composantes du cisaillement, suivant la loi :

$$(11) \quad \begin{cases} \tau_{xz} = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \tau_{yz} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \end{cases}$$

Enfin, il est possible de relier le couple de torsion  $C_T$  à  $\varphi(x,y)$  par la relation (12)

$$(12) \quad M_0(C_T) = 2 \iint_S \varphi(x,y) dx dy.$$

Dans cette équation, le premier membre signifie le moment par rapport au point O du couple  $C_T$ , O étant la trace sur la section considérée de l'axe de rotation.

### 2-1-3 Etude des déplacements

A partir des relations définissant  $u, v, w$ , de la loi de Hooke, et compte tenu des hypothèses faites sur la distribution des contraintes, nous exprimons les déplacements  $u, v, w$  d'un point quelconque de la section. Ceux-ci peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$(13) \quad \begin{cases} u = -\theta yz \\ v = \theta xz \\ w = \frac{1}{2G} \left[ \int_0^x \left( \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(x,0)}{\partial y} \right) dx - \int_0^y \left( \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(0,y)}{\partial x} \right) dy \right] \end{cases}$$

L'équation donnant  $w$  est obtenue (voir référence (14)), par intégration, sur le domaine constituant la section envisagée, de relations de la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} + f(y) \\ \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} + g(x) \end{cases}$$

Les relations (13) montrent qu'au cours de la déformation tout élément  $Oz$  de l'axe de rotation ne cesse de coïncider avec lui-même. Ainsi l'axe de torsion (que l'on peut prendre quelconque, et qui en fait résulte des conditions d'application du couple de torsion) reste identique à lui-même. D'autre part,  $w = f(xy)$  ne dépend point de  $z$ . Cela signifie que tous les points situés sur une parallèle aux génératrices, et partant, à l'axe de rotation, subissent le même gauchissement. Dans le cas particulier d'une barre dont la section admet 2 axes de symétrie  $xx'$  et  $yy'$ , et dont le centre de torsion coïncide avec le centre de symétrie, nous constatons que les axes  $xx'$  et  $yy'$  ne subissent aucun gauchissement et que le centre  $O$  devient centre de symétrie de la surface gauchie.

Ces remarques et propriétés nous seront particulièrement utiles lors de l'étude expérimentale du gauchissement pour la détermination des lignes de niveau.

## 2-2 CAS DE SECTIONS RECTANGULAIRES ET ELLIPTIQUES

### 2-2-1 Section elliptique

Considérons le cas où la barre est à section elliptique. Celle-ci admet deux axes et un centre de symétrie. La mise en charge se fait de telle sorte que le centre de torsion coïncide avec le centre de symétrie. L'axe de symétrie se confond alors avec l'axe de torsion  $Oz$ .

La fonction  $\varphi(x, y)$  peut s'écrire sous la forme :

$$(14) \quad \varphi = \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad \text{avec} \quad \lambda = - \frac{M_T}{\pi ab}$$

$a$  et  $b$  étant les  $\frac{1}{2}$  grands axes de l'ellipse,

$M_T$  le moment de torsion.

A partir de (12), il vient :

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} \tau_{xy} = -\frac{2 M_T y}{\pi a^3} \\ \tau_{yx} = \frac{2 M_T x}{\pi a^3 b} \end{array} \right.$$

Ces relations montrent que le rapport des 2 composantes est égal à  $\frac{y}{x}$ , et que les lignes de contrainte égale sont des ellipses.

Introduisant  $G$ , nous appelons rigidité à la torsion  $R = G \cdot J_o$  où  $J_o$  est le coefficient de torsion spécifique à chaque type de section.

Pour une section circulaire,  $J_o$  se confond avec le moment d'inertie polaire  $I_o$  ;  
pour une section elliptique,  $J_o = \frac{S^4}{4 \pi^2 I_o}$  ( $S$  = surface de la section)

Enfin pour ce qui est des déplacements,  $u$ ,  $v$ ,  $w$ , les formules (13) donnent ici :

$$(16) \left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{M_T}{G J_o} yz \\ v = \frac{M_T}{G J_o} xz \\ w = -\frac{a^2 - b^2}{\pi a^3 b^3} \cdot \frac{M_T}{G} xy \end{array} \right.$$

### 2-2-2 Section rectangulaire

Soit à présent une section rectangulaire soumise à la torsion suivant les mêmes hypothèses que précédemment. La détermination de la fonction  $\varphi(x, y)$  est basée sur le développement en série de Fourier,

lequel conduit à la relation (17) :

$$(17) \quad \varphi = \frac{32 b^2 G \theta_1}{\pi^3} \sum_{i=2n+1}^{i=\infty} \frac{1}{i^3} (-1)^n \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{i\pi x}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{i\pi a}{2b}} \right) \cos \frac{i\pi y}{2b}$$

Pour calculer les composantes  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{yz}$  du cisaillement, il suffit de dériver (17) suivant y et x, ce qui nous conduit aux relations (18) ci-dessous :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{a) } \tau_{xy} = -\frac{16 b G \theta_1}{\pi^2} \sum_{i=2n+1}^{i=\infty} \frac{1}{i^2} (-1)^n \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{i\pi x}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{i\pi a}{2b}} \right) \sin \frac{i\pi y}{2b} \\ \text{b) } \tau_{yz} = \frac{16 a G \theta_1}{\pi^2} \sum_{i=2n+1}^{i=\infty} \frac{1}{i^2} (-1)^n \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{i\pi y}{2a}}{\operatorname{ch} \frac{i\pi b}{2a}} \right) \sin \frac{i\pi x}{2a} \end{array} \right.$$

L'étude de ces équations montre que la contrainte  $\tau$  est maximum aux points du contour les moins éloignés du centre de rotation, donc au milieu des grands côtés du rectangle définissant la section. Cette contrainte  $\tau_M$  est fournie par :

$$(19) \quad \tau_M = -2 G \theta_1 b \left[ 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{i=2n+1}^{i=\infty} \frac{1}{i^2 \operatorname{ch} \frac{i\pi a}{2b}} \right] \quad \text{avec } b < a$$

Calculons la valeur de  $\tau_M$  dans le cas particulier d'un rectangle défini par  $a = 6 \text{ cm}$ ,  $b = 2 \text{ cm}$ . Il vient :

$$\begin{aligned} \tau_M &= 2 G \theta_1 \times 2 \left[ 1 - 0,810 \left( \frac{1}{1 \cdot \operatorname{ch} \frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{9 \cdot \operatorname{ch} 3 \frac{3\pi}{2}} + \frac{1}{25 \operatorname{ch} 5 \frac{3\pi}{2}} + \dots \right) \right] \\ &= 2 G \theta_1 \times 2 \left[ 1 - 0,810 (0,018 + \varepsilon) \right] \\ &= 2 G \theta_1 (1,97) \end{aligned}$$

TIMOSHENKO (1) écrit  $\tau_M$  sous la forme  $\tau_M = k.2G\theta_1.t$  où  $k$  est un facteur numérique caractérisant le rapport  $\frac{a}{b}$ .

Pour le rapport  $\frac{a}{b} = 3$ , les tables donnent  $k = 0,985$ .

Nous obtenons alors :  $\tau_M = 0,985 \times 2601 \times 2 = 2601 \quad (1,970)$

C'est bien le résultat trouvé plus haut.

## 2-3 CAS DE PROFILS OUVERTS. PROBLEMES TECHNIQUES

### 2-3-1 Position du problème

Dans l'industrie, l'ingénieur a souvent besoin de connaître le module de rigidité à la torsion de barres dont les sections sont des profilés ouverts, c'est-à-dire des cornières, telles par exemples que celles représentées à la figure ci-dessous.

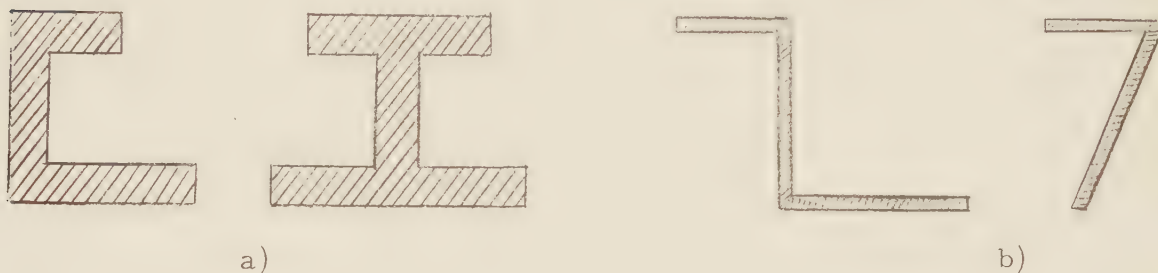


Figure 2

Dans tous les cas il s'agit de sections représentant une figure géométrique ayant une certaine épaisseur. Cette dernière peut être négligeable devant les autres dimensions (cas des figures 2 b), ou, tout en demeurant inférieure aux "longueurs" peut ne pas être infiniment petite (figure 2 a).

D'une façon générale (15), le module de rigidité à la torsion,  $R$ , est donné par la relation  $R = G \cdot J_o$ , avec

$$\theta_1 = \frac{M_t}{G I_o} \quad (G \text{ est le module de rigidité au cisaillement}).$$

Le problème se ramène donc à déterminer  $J_o$ , coefficient de torsion, qui est une constante spécifique à chaque type de section.

### 2-3-2 Cas d'une barre à section rectangulaire étroite

Imaginons en premier lieu le cas où la section de la barre est un rectangle étroit tel par exemple que  $b \ll a$ . L'analogie avec la membrane fournit une solution simple. En effet, en négligeant l'influence du petit côté  $b$ , nous assimilons la surface fléchie à un cylindre, et nous sommes ramenés au problème d'une ligne élastique parabolique d'une corde uniformément chargée.

Nous savons que le moment de torsion  $M_t$  est égal au double du volume compris entre le plan horizontal et la membrane fléchie, ceci après avoir identifié  $\frac{q}{S}$  à  $-2G$ .

Ainsi  $M_t = 2V = 2\left(\frac{3}{2} a b f\right)$ , où  $f$  est la flèche de la ligne parabolique.

Comme  $f = \frac{q}{S} \cdot \frac{b^2}{8}$ , par identification il vient :

$$M_t = 2 \cdot \frac{2}{3} a b \frac{q}{S} \cdot \frac{b^2}{8}$$

$$M_t = \frac{1}{3} a b^3 G \theta_1$$

$$\text{D'où} \quad \theta_1 = \frac{M_t}{\frac{1}{3} a b^3 G}$$

$$\text{Donc} \quad J_o = \frac{1}{3} a b^3 = \frac{1}{3} a e^3 \quad (e = b = \text{épaisseur})$$

Lorsqu'il s'agit de profilés ouverts tels ceux de la figure (2 b), on les décompose en rectangles élémentaires, ce qui revient à les "développer", et on exprime  $J_o$  sous la forme générale :

$$J_o = \frac{1}{3} \sum a e^3 = \frac{1}{3} \sum l e^3 \quad (l = \text{longueur})$$

Industriellement on procède ainsi dans le cas de profilés où  $e \ll 20 l$ . L'erreur commise est voisine de 3 %.

Il convient également de noter que lorsqu'il s'agit d'une section à épaisseur évolutive  $e$ , demeurant faible vis à vis de la longueur totale, on améliore les calculs en posant :

$$J_o = \frac{\frac{1}{3} \int_0^l e^3 dl}{1 + \frac{4}{3} \frac{\int_0^l e^3 dl}{S l^2}}$$

où  $l$  est la longueur totale de la ligne médiane  
 $e$  l'épaisseur normale à cette ligne  
 $S$  l'aire de la section.

La valeur du dénominateur est en fait fort peu supérieure à 1 car le terme correctif  $\frac{4}{3} \frac{\int_0^l e^3 dl}{S l^2}$  est relativement faible.

### 2-3-3 Eléments à épaisseur non faible

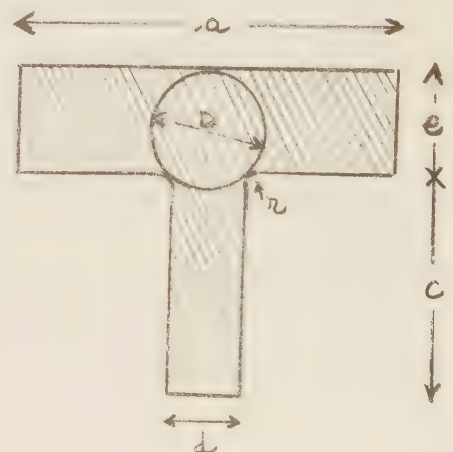
La bibliographie est assez riche en formules approximatives donnant  $J_o$ . Nous avons retenu les suivantes, notamment utilisées en aéronautique et dont il nous a été donné de vérifier les résultats, s'appliquant aux différents profilés types suivants :

#### Profilté en T

$$J_o = a e^3 \left[ \frac{1}{3} - 0,21 \frac{e}{a} \left( 1 - \frac{e^4}{12 a^4} \right) \right] + c d^3 \left[ \frac{1}{3} - 0,105 \frac{d}{c} \left( 1 - \frac{d^4}{192 c^4} \right) \right] + \frac{t}{t_1} \left[ 0,15 + 0,10 \frac{r}{e} \right] D^4$$

avec  $t = d$   $t_1 = e$  si  $e > d$ ,

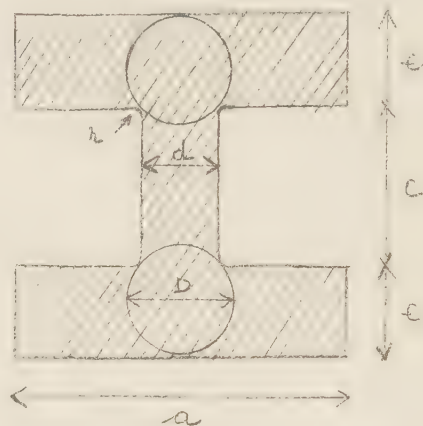
$t = e$   $t_1 = d$  si  $e < d$ .



Quant à  $r$ , c'est le rayon de courbure du congé. Les intersections ne sont en effet point à angle droit car ceci provoquerait des concentrations de contraintes susceptibles de produire des ruptures en ces endroits. Ces contraintes sont diminuées par les arrondis ou congés pré-cités.

Profilé en double T : I

$$J_o = 2 a e^3 \left[ \frac{1}{3} - 0,21 \frac{e}{a} \left( 1 - \frac{e^4}{12 a^4} \right) \right] + \frac{1}{3} c d^3 \left[ 1 \right] + 2 \frac{t}{t_1} \left[ 0,15 + 0,10 \frac{r}{e} \right] D^4$$

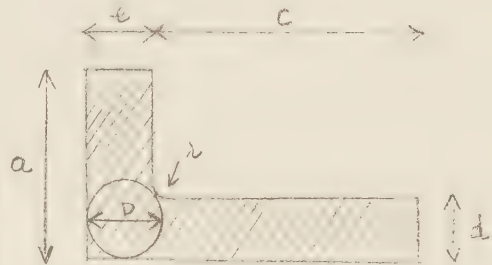


où  $t$  et  $t_1$  sont définis comme précédemment.

Evidemment cette formule est analogue à celle ci-dessus et a été obtenue par décomposition en deux éléments T.

Profilé en L

$$J_o = a e^3 \left[ \frac{1}{3} - 0,21 \frac{e}{a} \left( 1 - \frac{e^4}{12 a^4} \right) \right] + c d^3 \left[ \frac{1}{3} - 0,105 \frac{d}{c} \left( 1 - \frac{d^4}{192 c^4} \right) \right] + \frac{t}{t_1} \left[ 0,07 + 0,076 \frac{r}{e} \right] D^4$$



Pour les autres profilés on fait des décompositions qui permettent de se ramener aux cas précédents.

Règles générales (16)

On divise la section en portions élémentaires, rectangulaires pour les âmes et ailes, circulaires pour les boudins.

Dans le cas d'un profilé en T on considère l'aile comme étant continue, l'âme commençant au bord de celle-ci.

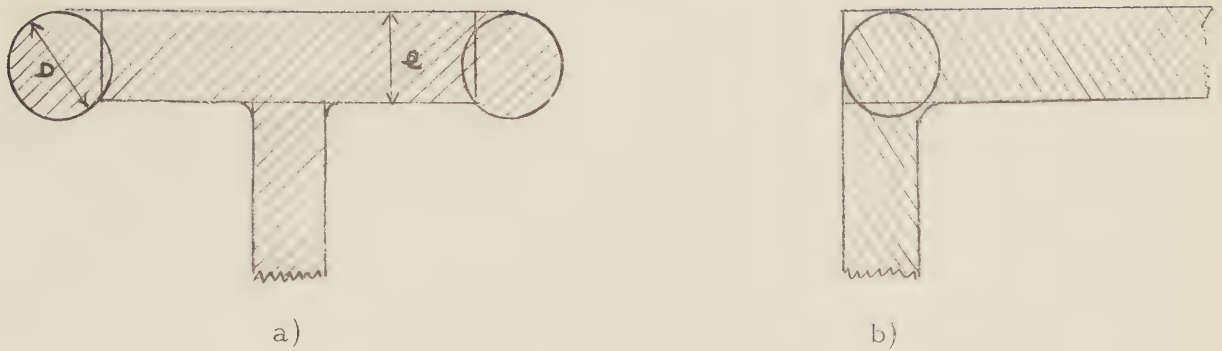


Figure 3

Pour un profilé en L, on considère l'élément le plus épais comme étant continu jusqu'au bord de la section, l'autre élément commençant seulement au bord du premier.

Pour un élément rectangulaire, on calcule  $J_0$  à partir de  $\frac{1}{3} e^3 l$

Pour un boudin de diamètre D par  $\frac{\pi D^4}{32}$

Enfin pour les extrémités rectangulaires libres (cas d'un T par exemple), on améliore la précision en apportant la correction suivante :

$$\Delta J_0 = - 0,105 e^4.$$

Les formules calculées ainsi qu'il vient d'être exposé permettent d'obtenir  $J_0$  à moins de 2 % près pourvu que  $l > 1,5 e$ , ce qui est, en général toujours vrai.

## 2-4 RESOLUTION NUMERIQUE APPROCHEE DU LAPLACIEN

Nous venons de voir que la solution du problème de la torsion nécessite la résolution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = - 2G\theta_1$$

Différentes méthodes d'approximation sont possibles. Elles sont en général basées sur le principe des différences finies, lequel consiste à remplacer les dérivées par le rapport de petits accroissements, donc à substituer  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  à  $\frac{dy}{dx}$ . De la sorte l'équation (10) est satisfaite en un certain nombre limité de points isolés du domaine. Ces points sont les noeuds d'un quadrillage adapté au problème posé et notamment au contour de la section.

SALLES (17), utilise et développe cette méthode lors de la détermination des contraintes dans les problèmes bi-dimensionnels tels que la recherche des états de charge dans les plaques. L'emploi de la méthode conduit à un système de  $n$  équations à  $n$  inconnues. Si le quadrillage est serré,  $n$  est grand. Il s'ensuit que la résolution n'est possible qu'avec l'utilisation de calculateurs électroniques. Sinon, un tel procédé est seulement utilisable pour  $n$  faible, c'est-à-dire, toutes choses égales par ailleurs, dans le cas d'un maillage très lâche, qui permettra de se faire une première idée quant aux valeurs de  $\varphi$ .

Un autre processus de résolution développé par SHAW (4) et SOUTHWELL (5) est celui nommé "Méthode de Relaxation". Cette méthode consiste à considérer au départ des valeurs approximatives de  $\varphi(x,y)$  conduisant à des valeurs résiduelles  $\Delta \varphi$ , puis par approximations successives à diminuer ces résidus, en tenant compte essentiellement des conditions aux limites. De la sorte il est possible de résoudre numériquement l'équation (10) dans le cas de quadrillages beaucoup plus serrés.

## CHAPITRE III

### RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -2G\theta_1$ DANS LE CAS DE CONTOURS ELLIPTIQUES ET RECTANGULAIRES

A) Position du problème. Méthode de résolution sur machine BULL,  
type GAMMA - TAMBOUR

#### 3-1 POSITION DU PROBLEME

Rappelons qu'une équation aux dérivées partielles admet une infinité de solutions. Des conditions supplémentaires permettent de déterminer une solution particulière. De telles conditions prennent la forme de spécifications sur la façon dont la solution se conduit sur une courbe, ou près d'une courbe que l'on appelle limite ou frontière.

Le présent problème consiste à intégrer l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = K \quad \text{sur un domaine fermé limité dans un premier}$$

cas par une ellipse, dans un second cas par un rectangle. La condition aux limites est la suivante : elle spécifie la valeur de la fonction sur la frontière.  $\varphi$  est constamment nulle au bord de la section. Il s'agit d'un problème de Dirichlet qui admet une solution unique.

La programmation a été conçue de telle sorte que la résolution numérique de l'équation précitée soit possible pour tout contour elliptique d'une part, pour tout contour rectangulaire d'autre part, ceci quelles que soient les valeurs des paramètres et constantes  $a, b, \Delta x, \Delta y, G, \theta_1$ . Il convient donc de considérer les tableaux numériques obtenus dans l'un et l'autre cas comme des extraits de tables susceptibles d'être établies par simple addition au programme généré, d'une carte de données supplémentaires.

Notons enfin que lorsque la frontière est définie par une ellipse, la résolution est rendue aisée par une solution particulière simple. Nous avons néanmoins tenu à faire la programmation pour cette configuration, afin de comparer les résultats pour l'une et l'autre section.

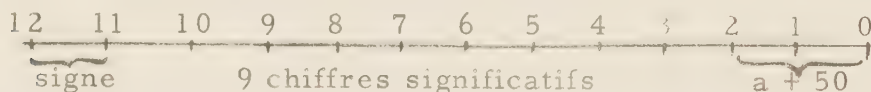
### 3-2 EXPOSE DE LA METHODE DE PROGRAMMATION

#### 3-2-1 Généralités

Le calculateur utilisé possède un tambour magnétique servant de mémoire centrale, dont la capacité est de 8.192 ou 16.384 mots, de 12 positions décimales chacun. La tabulation connectée servant d'organe d'entrée et de sortie peut lire 150 cartes perforées et imprimer 150 lignes à la minute.

La méthode de programmation conçue pour ce calculateur est celle nommée A.P.2 (Autoprogrammation 2). En A.P.2., les calculs sont faits sur des nombres écrits en "virgule flottante". Cette écriture qui permet de conserver tout au long des opérations un nombre constant de chiffres significatifs, consiste à exprimer tout nombre sous la forme  $0, \alpha \beta \gamma \dots \times 10^a$ . Pour affranchir  $a$  de son signe, et avoir  $a > 0$ , on l'augmente systématiquement de 50.

Les 12 positions d'une mémoire sont réparties comme suit :



#### Remarques

- Le signe moins (-) est représenté par un zéro, le signe plus (+) par l'absence de zéro.
- Les 9 chiffres significatifs du nombre sont appelés "mantisse".

Il est ainsi possible, grâce aux deux chiffres de l'exposant ou "caractéristique", d'exprimer tous les nombres compris entre  $10^{-50}$  et  $10^{49}$ .

Exemples :  $0,00002345 = 0,2345 \times 10^{-4}$


$$= 53,87961 = 0,5387961 \times 10^2$$


- Dans une telle écriture les zéros et les virgules ne sont pas indiqués, ces symboles n'apportant aucun renseignement supplémentaire.

### 3-2-2 Principe de programmation. Organigramme

Le plus grand nombre des problèmes traités sur machine a une telle importance qu'il est impossible, la plupart du temps, de les dominer dans leur ensemble. Il est nécessaire, avant d'en commencer la programmation, de mettre en évidence la structure du problème. Pour figurer l'enchaînement logique des séquences de calcul, on utilise un graphisme qui se nomme organigramme.

Celui-ci est une suite de cases et de lignes dans lesquelles sont résumées les principales opérations à effectuer. Par exemple, une séquence de calcul sera représentée par un rectangle dans lequel on inscrira les formules à programmer. La composition de l'organigramme est fondamentale et souvent, la seule difficulté de la résolution réside dans l'élaboration de celui-ci.

### 3-2-3 Programmation

A partir de l'organigramme il faut établir la programmation effective du problème. Sur machine GAMMA - TAMBOUR, ce programme est nommé A.P. 2 (Autoprogrammation 2). Il s'agit d'un langage intermédiaire entre celui mathématique habituel et celui propre au calculateur. Il comprend la suite chronologique de toutes les opérations symboliques que devra résoudre le calculateur.

Ces opérations sont essentiellement de 3 genres. On distingue les opérations d'introduction, les opérations de calculs, les opérations d'extraction. Les premières consistent à introduire des données sur des cartes perforées. Mais elles sont accompagnées par des opérations de rangement, d'affectation d'adresses ... Les opérations de calculs sont des opérations mathématiques. Leur nombre est très élevé. En dehors des 4 opérations arithmétiques on utilise des opérations telles que sinus, racine, valeur absolue, comparaison... Quant aux opérations d'extraction, elles consistent à ordonner et imprimer des résultats.

On peut extraire jusqu'à 7 résultats par ligne.

Mais d'autres opérations interviennent encore dans l'écriture d'un programme. Nous ferons allusion aux opérations de saut, qui permettent la discontinuité dans une chaîne de calculs (ces discontinuités sont de deux sortes : les itérations et les variantes) ; aux opérations de test ; aux opérations diverses telles que transfert ou effacement de mémoire ; à des calculs d'adresses.

L'autoprogrammation apparaît comme une suite souvent longue d'opérations symboliques relativement variées. Ainsi, l'A. P. 2 de notre équation a nécessité plus de 150 opérations dans le cas d'un contour elliptique, plus de 250 pour la section rectangulaire

#### 3-2-4 Programme généré

Le programme A. P. 2 étant réalisé, on fait subir à celui-ci deux transformations. Tout d'abord, les symboles des opérandes sont transformés en adresses relatives. Ceci conduit au programme pseudo-symbolique. Ensuite ce dernier est codifié. Au cours de cette transformation, la machine analyse le programme précédent et en compose un nouveau. C'est le programme machine ou programme généré. Il est concrétisé et extrait sous forme de cartes perforées

### 3-3 REALISATION DES ORGANIGRAMMES

Nous présentons dans le présent paragraphe les organigrammes correspondant aux deux types de section. Quant aux programmations, elles ne présentent qu'un intérêt relatif. Nous ne les ferons point figurer, la chronologie des opérations étant plus condensée évidemment, mais beaucoup plus nette dans les organigrammes qui suivent.

Pour ce qui est des valeurs numériques des constantes, elles sont les suivantes :

$$a = 6 \text{ cm } ( = 6 \times 10^{-2} \text{ m} )$$

$$b = 2 \text{ cm } ( = 2 \times 10^{-2} \text{ m} )$$

$$x = y = 0.5 \text{ cm } ( = 5 \times 10^{-3} \text{ m} )$$

$$\begin{aligned} G &= 1 \quad ( = 1 \times 10^6 \text{ Pa} ) \\ &= 0,5 \quad ( = 5 \frac{\text{rd}}{\text{m}} ) \end{aligned}$$

Remarquons que G a la dimension suivante :  $[G] = L^{-1} M T^{-2}$

La valeur de G utilisée dans la résolution est celle déterminée dans la partie expérimentale. Celle de  $\theta_1$  correspond également aux angles de torsion auxquels ont été soumises les éprouvettes.

### 1°) Cas d'une section elliptique

La solution de l'équation aux dérivées partielles dans ce cas est de la forme :

$$\varphi = \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$$

avec  $\lambda = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} (-2 G \theta_1)$ .

L'organigramme est celui figurant aux pages 24 et 25.

### 2°) Cas d'une section rectangulaire

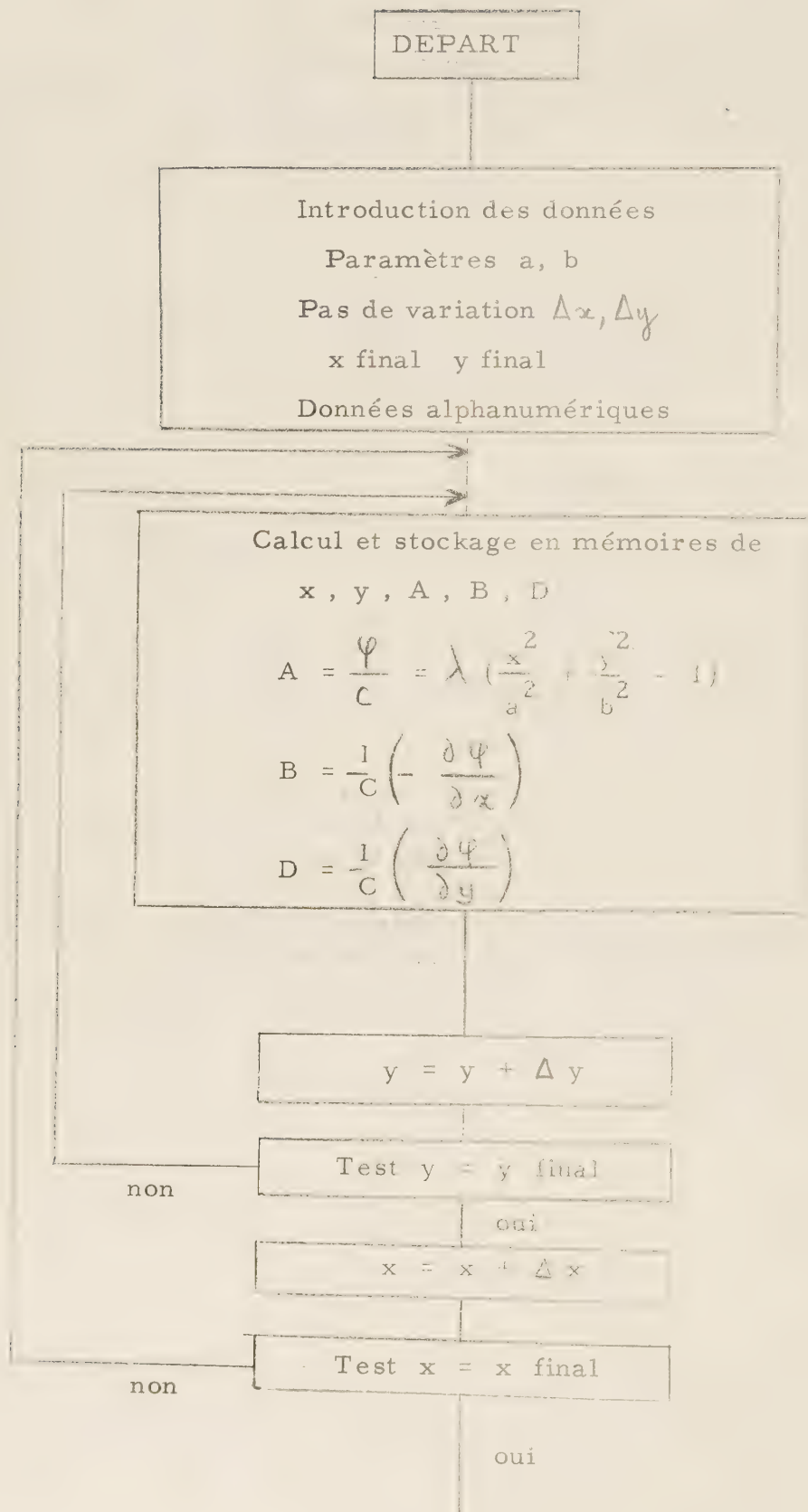
La solution  $\varphi$  se présente sous forme du développement en série :

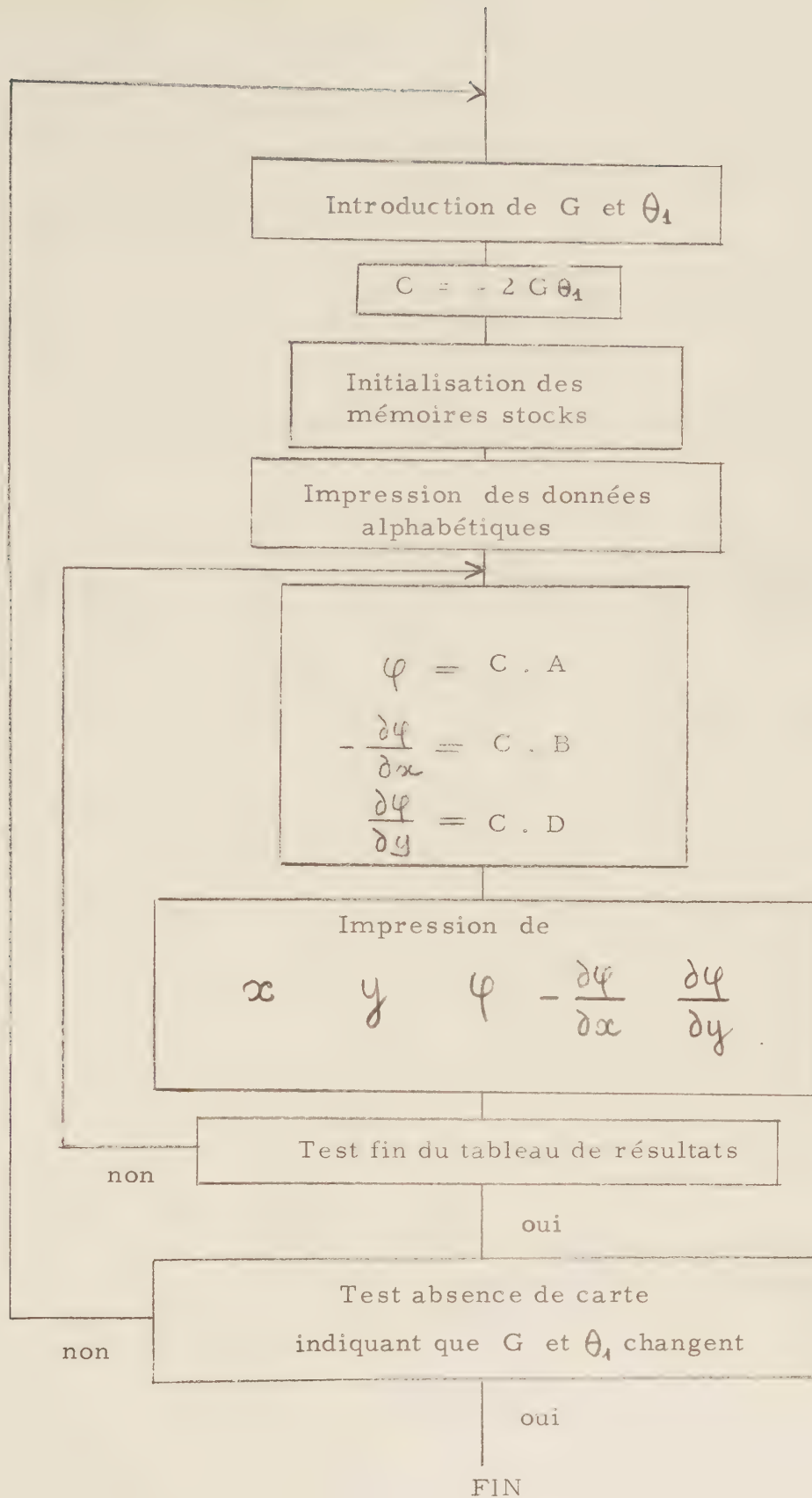
$$\varphi = \frac{32 b^2 G \theta_1}{\pi^3} \sum_{i=2n+1}^{i=\infty} \frac{1}{i^3} (-1)^n \left( 1 - \frac{\operatorname{ch} \frac{i\pi x}{2b}}{\operatorname{ch} \frac{i\pi a}{2b}} \right) \cos \frac{i\pi y}{2b}$$

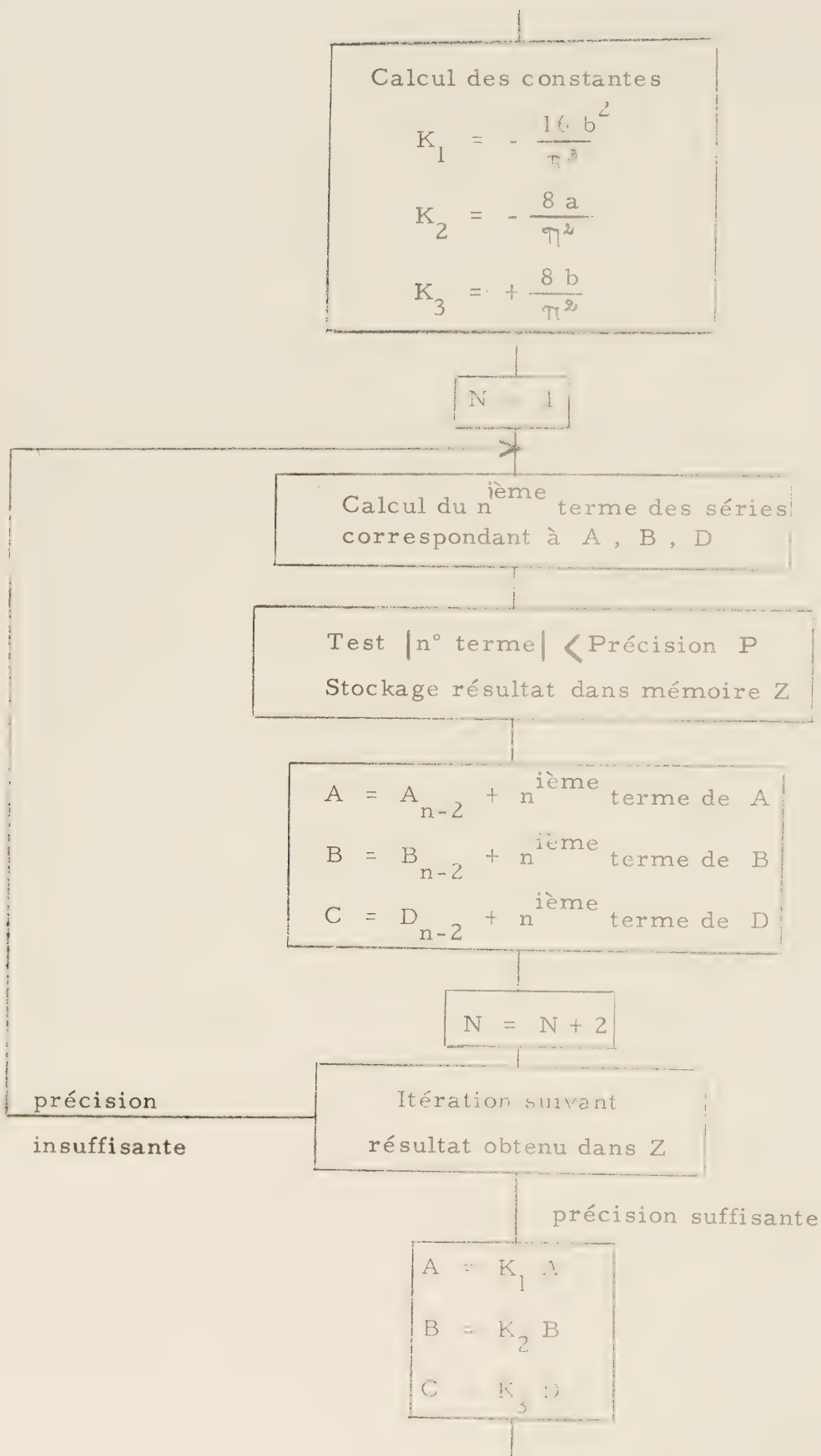
Les  $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$  sont les dérivées relativement à x et y de (17).

L'organigramme se présente sous une forme semblable.

La seule partie qui diffère est celle qui consiste à calculer  $\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}$  et qui est notée T dans l'organigramme précédent. Nous allons nous borner à expliciter T, étant donné que le reste de l'organigramme est identique. Notons toutefois que dans la partie "Introduction", on a introduit une donnée supplémentaire : la précision P qui conditionne le nombre de termes à utiliser dans chacune des séries. Nous trouvons page 26 l'organigramme correspondant à la partie T.







## B) Résultats se rapportant à une section elliptique

### 3-4 TABLEAUX NUMERIQUES

Les résultats sont présentés sous forme de tableaux de 5 colonnes dans lesquels on lit de gauche à droite, respectivement :

$$x \qquad y \qquad \varphi \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \tau_{yz} \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \tau_{xz}$$

Ainsi, en tout noeud du quadrillage, on connaît la valeur de la fonction et les composantes de la contrainte de cisaillement

Le premier tableau (tableau 1) est celui extrait du calculateur, donc écrit en virgule flottante. Le tableau suivant (tableau 2) est tiré du précédent, et écrit en langage habituel. Dans ce dernier, nous avons seulement retenu 4 chiffres après la virgule, la précision en découlant étant encore très grande.

La lecture de l'un ou l'autre de ces tableaux nous montre que :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \tau_{yz} = \text{Cte} \quad \text{pour } x = \text{Cte} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \tau_{xz} = \text{Cte} \quad \text{pour } y = \text{Cte} \end{aligned}$$

Ce résultat était à attendre, puisque nous tirons de

$$\varphi = \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) : \quad \begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{2\lambda x}{a^2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{2\lambda y}{b^2} \end{cases}$$

### 3-5 DEPOUILLEMENT DES RESULTATS NUMERIQUES. INTERPRETATION

#### 3-5-1 Diagramme $\varphi = \text{Cte}$

Les résultats numériques ci-dessus exprimés concernent le quart de la section, celui correspondant à  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Mais, par symétrie, nous en déduisons les valeurs de  $\varphi$  sur tout le domaine.

|         |    |         |             |     |     |       |     |     |    |
|---------|----|---------|-------------|-----|-----|-------|-----|-----|----|
| ...A... | 6  | 51      | ...B...     | 2   | 51  |       |     |     |    |
| ...G... | 5  | 49      |             |     |     |       |     |     |    |
| TETA    | 1  | 5       |             |     |     |       |     |     |    |
| ...X... |    | ...Y... | FI          | M   | DFI | SURDX | DFI | SUR | DY |
|         |    |         | 018         | 51  |     |       |     |     |    |
|         | 5  | 5       | 016875      | 51  |     |       | 45  | 5   |    |
|         | 1  | 51      | 0135        | 51  |     |       | 9   | 5   |    |
|         | 15 | 51      | 07875       | 5   |     |       | 135 | 51  |    |
|         | 2  | 51      |             |     |     |       | 18  | 51  |    |
| 5       | 5  |         | 017875      | 51  | 05  | 49    |     |     |    |
| 5       | 5  | 5       | 01675       | 51  | 05  | 49    | 45  | 5   |    |
| 5       | 5  | 1       | 013375      | 51  | 05  | 49    | 9   | 5   |    |
| 5       | 5  | 15      | 0775        | 85  | 05  | 49    | 135 | 51  |    |
| 5       | 5  | 2       | 12499992    | 49  | 05  | 49    | 18  | 51  |    |
| 1       | 51 |         | 0175        | 151 | 01  | 5     |     |     |    |
| 1       | 51 | 5       | 016375      | 151 | 01  | 5     | 45  | 5   |    |
| 1       | 51 | 1       | 013         | 151 | 01  | 5     | 9   | 5   |    |
| 1       | 51 | 15      | 07375       | 145 | 01  | 5     | 135 | 51  |    |
| 1       | 51 | 2       | 49999986    | 49  | 01  | 5     | 18  | 51  |    |
| 15      | 51 |         | 016875      | 51  | 015 | 5     |     |     |    |
| 15      | 51 | 5       | 01575       | 51  | 015 | 5     | 45  | 5   |    |
| 15      | 51 | 1       | 012375      | 51  | 015 | 5     | 9   | 5   |    |
| 15      | 51 | 15      | 0675        | 5   | 015 | 5     | 135 | 51  |    |
| 15      | 51 | 2       | 1125        | 5   | 015 | 5     | 18  | 51  |    |
| 2       | 51 |         | 016         | 51  | 02  | 5     |     |     |    |
| 2       | 51 | 5       | 014875      | 51  | 02  | 5     | 45  | 5   |    |
| 2       | 51 | 1       | 0115        | 51  | 02  | 5     | 9   | 5   |    |
| 2       | 51 | 15      | 05875       | 25  | 02  | 5     | 135 | 51  |    |
| 2       | 51 | 2       | 199999985   |     | 02  | 5     | 18  | 51  |    |
| 25      | 51 |         | 014875      | 51  | 025 | 5     |     |     |    |
| 25      | 51 | 5       | 01375       | 51  | 025 | 5     | 45  | 5   |    |
| 25      | 51 | 1       | 01375       | 51  | 025 | 5     | 9   | 5   |    |
| 25      | 51 | 15      | 0475        | 25  | 025 | 5     | 135 | 51  |    |
| 25      | 51 | 2       | 3124999985  |     | 025 | 5     | 18  | 51  |    |
| 3       | 51 |         | 0135        | 51  | 03  | 5     |     |     |    |
| 3       | 51 | 5       | 012375      | 51  | 03  | 5     | 45  | 5   |    |
| 3       | 51 | 1       | 09          | 5   | 03  | 5     | 9   | 5   |    |
| 3       | 51 | 15      | 03375       | 5   | 03  | 5     | 135 | 51  |    |
| 3       | 51 | 2       | 45          | 5   | 03  | 5     | 18  | 51  |    |
| 35      | 51 |         | 011875      | 151 | 035 | 5     |     |     |    |
| 35      | 51 | 5       | 0175        | 151 | 035 | 5     | 45  | 5   |    |
| 35      | 51 | 1       | 07375       | 145 | 035 | 5     | 9   | 5   |    |
| 35      | 51 | 15      | 0175        | 145 | 035 | 5     | 135 | 51  |    |
| 35      | 51 | 2       | 6124999865  |     | 035 | 5     | 18  | 51  |    |
| 4       | 51 |         | 01          | 51  | 04  | 5     |     |     |    |
| 4       | 51 | 5       | 08875       | 85  | 04  | 5     | 45  | 5   |    |
| 4       | 51 | 1       | 055         | 85  | 04  | 5     | 9   | 5   |    |
| 4       | 51 | 15      | 12499992    | 49  | 04  | 5     | 135 | 51  |    |
| 4       | 51 | 2       | 7999999925  |     | 04  | 5     | 18  | 51  |    |
| 45      | 51 |         | 07875       | 5   | 045 | 5     |     |     |    |
| 45      | 51 | 5       | 0675        | 5   | 045 | 5     | 45  | 5   |    |
| 45      | 51 | 1       | 03375       | 5   | 045 | 5     | 9   | 5   |    |
| 45      | 51 | 15      | 225         | 5   | 045 | 5     | 135 | 51  |    |
| 45      | 51 | 2       | 1125        | 51  | 045 | 5     | 18  | 51  |    |
| 5       | 51 |         | 055         | 85  | 05  | 5     |     |     |    |
| 5       | 51 | 5       | 04375       | 85  | 05  | 5     | 45  | 5   |    |
| 5       | 51 | 1       | 01          | 85  | 05  | 5     | 9   | 5   |    |
| 5       | 51 | 15      | 4624999925  |     | 05  | 5     | 135 | 51  |    |
| 5       | 51 | 2       | 1249999951  |     | 05  | 5     | 18  | 51  |    |
| 55      | 51 |         | 02875       | 145 | 055 | 5     |     |     |    |
| 55      | 51 | 5       | 0175        | 145 | 055 | 5     | 45  | 5   |    |
| 55      | 51 | 1       | 1624999865  |     | 055 | 5     | 9   | 5   |    |
| 55      | 51 | 15      | 7249999865  |     | 055 | 5     | 135 | 51  |    |
| 55      | 51 | 2       | 15124999851 |     | 055 | 5     | 18  | 51  |    |
| 6       | 51 |         |             |     | 06  | 5     |     |     |    |
| 6       | 51 | 5       | 1125        | 5   | 06  | 5     | 45  | 5   |    |
| 6       | 51 | 1       | 45          | 5   | 06  | 5     | 9   | 5   |    |
| 6       | 51 | 15      | 1125        | 51  | 06  | 5     | 135 | 51  |    |
| 6       | 51 | 2       | 18          | 51  | 06  | 5     | 18  | 51  |    |

Tableau 1

| X (cm) | Y (cm) | $\varphi$ | $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ | $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ |
|--------|--------|-----------|----------------------------------------|---------------------------------------|
| 0      | 0      | 1,8000    | 0                                      | 0                                     |
| 0      | 0,5    | 1,6875    | 0                                      | 0,45                                  |
| 0      | 1      | -1,3500   | 0                                      | 0,90                                  |
| 0      | 1,5    | -0,7875   | 0                                      | 1,35                                  |
| 0      | 2      | 0         | 0                                      | 1,80                                  |
| 0,5    | 0      | 1,7875    | 0,05                                   | 0                                     |
| 0,5    | 0,5    | -1,6750   | 0,05                                   | 0,45                                  |
| 0,5    | 1      | -1,3475   | 0,05                                   | 0,90                                  |
| 0,5    | 1,5    | -0,7750   | 0,05                                   | 1,35                                  |
| 0,5    | 2      | 0,0129    | -0,05                                  | 1,80                                  |
| 1      | 0      | 1,7500    | -0,10                                  | 0                                     |
| 1      | 0,5    | 1,6375    | -0,10                                  | 0,45                                  |
| 1      | 1      | 1,3000    | -0,10                                  | 0,90                                  |
| 1      | 1,5    | 0,7375    | -0,10                                  | 1,35                                  |
| 1      | 2      | 0,0499    | -0,10                                  | 1,80                                  |
| 1,5    | 0      | -1,6875   | -0,15                                  | 0                                     |
| 1,5    | 0,5    | -1,5750   | -0,15                                  | 0,45                                  |
| 1,5    | 1      | -1,2375   | -0,15                                  | 0,90                                  |
| 1,5    | 1,5    | -0,6750   | -0,15                                  | 1,35                                  |
| 1,5    | 2      | 0,1125    | -0,15                                  | 1,80                                  |
| 2      | 0      | -1,6000   | -0,20                                  | 0                                     |
| 2      | 0,5    | -1,4875   | -0,20                                  | 0,45                                  |
| 2      | 1      | -1,1500   | -0,20                                  | 0,90                                  |
| 2      | 1,5    | -0,5875   | -0,20                                  | 1,35                                  |
| 2      | 2      | 0,1999    | -0,20                                  | 1,80                                  |
| 2,5    | 0      | 1,4875    | 0,25                                   | 0                                     |
| 2,5    | 0,5    | -1,3750   | -0,25                                  | 0,45                                  |
| 2,5    | 1      | -1,0375   | -0,25                                  | 0,90                                  |
| 2,5    | 1,5    | -0,4750   | -0,25                                  | 1,35                                  |
| 2,5    | 2      | 0,3124    | -0,25                                  | 1,80                                  |
| 3      | 0      | -1,3500   | -0,30                                  | 0                                     |
| 3      | 0,5    | -1,2375   | -0,30                                  | 0,45                                  |
| 3      | 1      | -0,9000   | -0,30                                  | 0,90                                  |
| 3      | 1,5    | -0,3375   | -0,30                                  | 1,35                                  |
| 3      | 2      | 0,4500    | -0,30                                  | 1,80                                  |
| 3,5    | 0      | -1,1875   | -0,35                                  | 0                                     |
| 3,5    | 0,5    | -1,0750   | -0,35                                  | 0,45                                  |
| 3,5    | 1      | -0,7375   | -0,35                                  | 0,90                                  |
| 3,5    | 1,5    | -0,1750   | -0,35                                  | 1,35                                  |
| 3,5    | 2      | 0,6124    | -0,35                                  | 1,80                                  |
| 4      | 0      | -1,0000   | -0,40                                  | 0                                     |
| 4      | 0,5    | -0,8875   | -0,40                                  | 0,45                                  |
| 4      | 1      | -0,5500   | -0,40                                  | 0,90                                  |
| 4      | 1,5    | 0,0124    | -0,40                                  | 1,35                                  |
| 4      | 2      | 0,7999    | -0,40                                  | 1,80                                  |
| 4,5    | 0      | -0,7875   | -0,45                                  | 0                                     |
| 4,5    | 0,5    | -0,6750   | -0,45                                  | 0,45                                  |
| 4,5    | 1      | -0,3375   | -0,45                                  | 0,90                                  |
| 4,5    | 1,5    | 0,2250    | -0,45                                  | 1,35                                  |
| 4,5    | 2      | 1,0125    | -0,45                                  | 1,80                                  |
| 5      | 0      | -0,5500   | -0,50                                  | 0                                     |
| 5      | 0,5    | -0,4375   | -0,50                                  | 0,45                                  |
| 5      | 1      | -0,1000   | -0,50                                  | 0,90                                  |
| 5      | 1,5    | 0,4624    | -0,50                                  | 1,35                                  |
| 5      | 2      | 1,2499    | -0,50                                  | 1,80                                  |
| 5,5    | 0      | -0,2875   | -0,55                                  | 0                                     |
| 5,5    | 0,5    | -0,1750   | -0,55                                  | 0,45                                  |
| 5,5    | 1      | 0,1624    | -0,55                                  | 0,90                                  |
| 5,5    | 1,5    | 0,7249    | -0,55                                  | 1,35                                  |
| 5,5    | 2      | 1,5124    | -0,55                                  | 1,80                                  |
| 6      | 0      | 0         | -0,60                                  | 0                                     |
| 6      | 0,5    | 0,1125    | -0,60                                  | 0,45                                  |
| 6      | 1      | 0,4500    | -0,60                                  | 0,90                                  |
| 6      | 1,5    | 1,0125    | -0,60                                  | 1,35                                  |
| 6      | 2      | 1,8000    | -0,60                                  | 1,80                                  |

Tableau 2

Partant du tableau ci-devant, nous construisons, à l'échelle 2, le diagramme des courbes  $\varphi = \text{Cte}$ , correspondant aux valeurs  $\varphi_0 = 0,25 ; 0,50 ; 0,75 ; 1 ; 1,25 ; 1,50 ; 1,75$ . Nous constatons que  $\varphi$  est maximum au centre de la section ( $\varphi_m = 1,80$ ), nul évidemment au bord de la section.

Quant aux courbes  $\varphi = \text{Cte}$ , qui, dans l'analogie avec la membrane correspondent aux lignes de niveau, ce sont des ellipses semblables à l'ellipse frontière, donc de même excentricité.

Retrouvons théoriquement ce résultat. Nous savons que la solution est donnée par :

$$\varphi = \lambda \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad \text{avec} \quad \lambda = - \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G \theta_1$$

Pour  $\varphi = \varphi_0$  il vient :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \left( 1 + \frac{\varphi_0}{\lambda} \right) = 0$$

$$\frac{x^2}{a^2 \left( 1 + \frac{\varphi_0}{\lambda} \right)} + \frac{y^2}{b^2 \left( 1 + \frac{\varphi_0}{\lambda} \right)} - 1 = 0$$

Cette équation est bien celle d'une ellipse de  $\frac{1}{2}$  grands axes

$$= a \sqrt{1 + \frac{\varphi_0}{\lambda}} = a k$$

$$= b \sqrt{1 + \frac{\varphi_0}{\lambda}} = b k$$

avec  $k = \sqrt{1 + \frac{\varphi_0}{\lambda}} = \sqrt{1 - \frac{\varphi_0}{G \theta_1} \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2}}$

Et il vient  $\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

Il y a donc parfaite concordance entre les résultats numériques et théoriques

Calculons à présent la valeur numérique des  $\frac{1}{2}$  grands axes d'une ellipse  $\varphi = \varphi_0$  ; soit par exemple celle  $\varphi_0 = 1,00$

Rappelons l'ensemble des valeurs numériques :

$$a = 6 \text{ cm}$$

$$G = 1$$

$$b = 2 \text{ cm}$$

$$\theta_1 = 0,5$$

$$\varphi = 1,00$$

$$k = \sqrt{1 - \frac{1 \times (36 + 4)}{36 \times 4 \times 1 \times 0,5}} = 0,667$$

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} \alpha = 6 \times 0,667 = 4,002 \\ \beta = 2 \times 0,667 = 1,334 \end{cases}$$

Compte tenu de l'échelle 2, nous devons trouver sur le diagramme

$$\begin{cases} \alpha = 8,004 \text{ cm} \\ \beta = 2,668 \text{ cm} \end{cases}$$

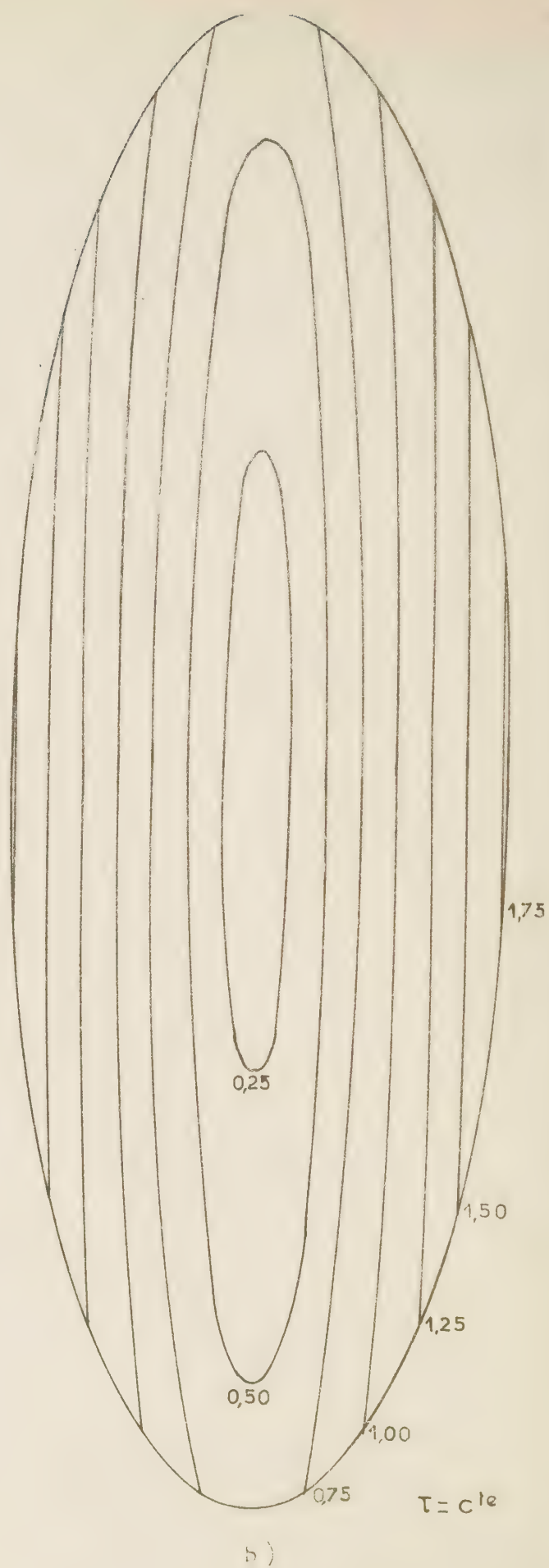
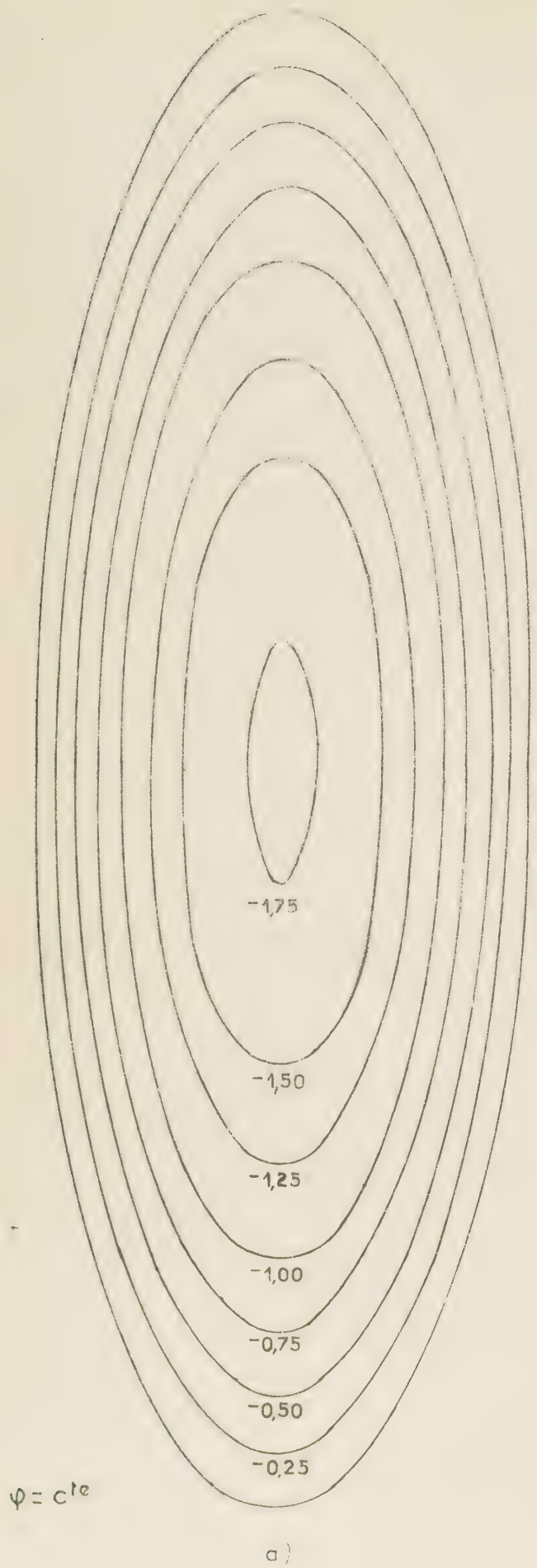
Or la courbe est définie par  $\alpha = 8 \text{ cm}$   $\beta = 2,65 \text{ cm}$ .  
Nous voyons que les deux couples correspondent parfaitement.

### 3-5-2 Diagramme $\tau = \text{Cte}$

Connaissant, en un point donné de la section  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{yx}$ , composantes de la contrainte de cisaillement  $\tau$ , nous calculons celle-ci en ce point. Puis nous construisons au graphe 1-b, toujours à l'échelle 2, le diagramme des contraintes  $\tau$ , c'est-à-dire les lignes  $\tau = \text{Cte}$ , correspondant aux valeurs  $\tau_0 = 0,25 - 0,50 - 0,75 - 1,00 - 1,25 - 1,50 - 1,75$ . Nous constatons comme l'indique la théorie que  $\tau$  est maximum à l'extrémité du petit axe de l'ellipse ( $\tau_m = 1,80$ ), nulle au centre ; aux extrémités du grand axe,  $\tau = 0,60$ . Quant aux lignes  $\tau_0$ , elles apparaissent comme des ellipses, d'excentricité très inférieure à celle des lignes  $\varphi_0 = \text{Cte}$ .

Recherchons l'équation de ces courbes. A partir de :

$$\begin{cases} \tau_{xy} = - \frac{2 Mt y}{ab^3} \\ \tau_{yx} = \frac{2 Mt x}{a^3 b} \end{cases}$$



$$\text{Il vient } \tau^2 = \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 = k^2 \left( \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} \right)$$

$$\text{avec } k = \frac{2 Mt}{ab} = 2 \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} G \theta_1$$

$$\text{d'où } \frac{\frac{x^2}{a^4} \tau^2}{k^2} + \frac{\frac{y^2}{b^4} \tau^2}{k^2} - 1 = 0$$

Il s'agit bien de l'équation d'une ellipse de  $\frac{1}{2}$  grands axes  $\begin{cases} \alpha = a^2 \frac{\tau}{k} \\ \beta = b^2 \frac{\tau}{k} \end{cases}$

$$\text{de rapport : } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a^2}{b^2} = \left( \frac{a}{b} \right)^2$$

Calculons maintenant la valeur numérique de  $\alpha$  et  $\beta$  dans le cas de l'ellipse  $\tau_0 = 0,50$

$$k = \frac{2 a^2 b^2}{a^2 + b^2} G \theta_1 = \frac{2 \times 114 \times 1 \times 0,5}{40} = \frac{144}{40}$$

$$\alpha = a^2 \frac{\tau}{k} = \frac{36 \times 0,5 \times 40}{144} = 5$$

$$\beta = \frac{\alpha}{9} = \frac{5}{9}$$

Et, en tenant compte de l'échelle du diagramme,

$$\alpha' = 5 \times 2 = 10 \text{ cm}$$

$$\beta' = \frac{10}{9} = 1,1 \text{ cm}$$

Ce sont précisément les valeurs des  $\frac{1}{2}$  axes de l'ellipse  $\tau_0 = 0,50$

Ainsi, là encore, il y a parfaite concordance entre les deux résultats.

C) Résultats se rapportant à une section rectangulaire

3-6 TABLEAU NUMERIQUE

Seul figurera ici le tableau décodé obtenu à partir de celui extrait de la machine. Il se présente sous la même forme que le précédent et correspond, nous le savons, aux mêmes données numériques.

Nous constatons que la valeur maximum de  $\varphi$  est supérieure à son homologue de la section elliptique. Cette valeur se trouve au centre de la section. Ici également, la résolution concerne seulement le  $1/4$  de section défini par  $x > 0$ ,  $y > 0$ . Mais par symétrie, nous en déduisons les valeurs de  $\varphi$  sur toute la section.

Le tableau 3 de la page suivante nous fournit les valeurs de

$\varphi$ ,  $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ , pour les différents noeuds du réseau.

3-7 DEPOUILLEMENT DES RESULTATS NUMERIQUES. INTERPRETATION

3-7-1 Diagramme  $\varphi = Cte$

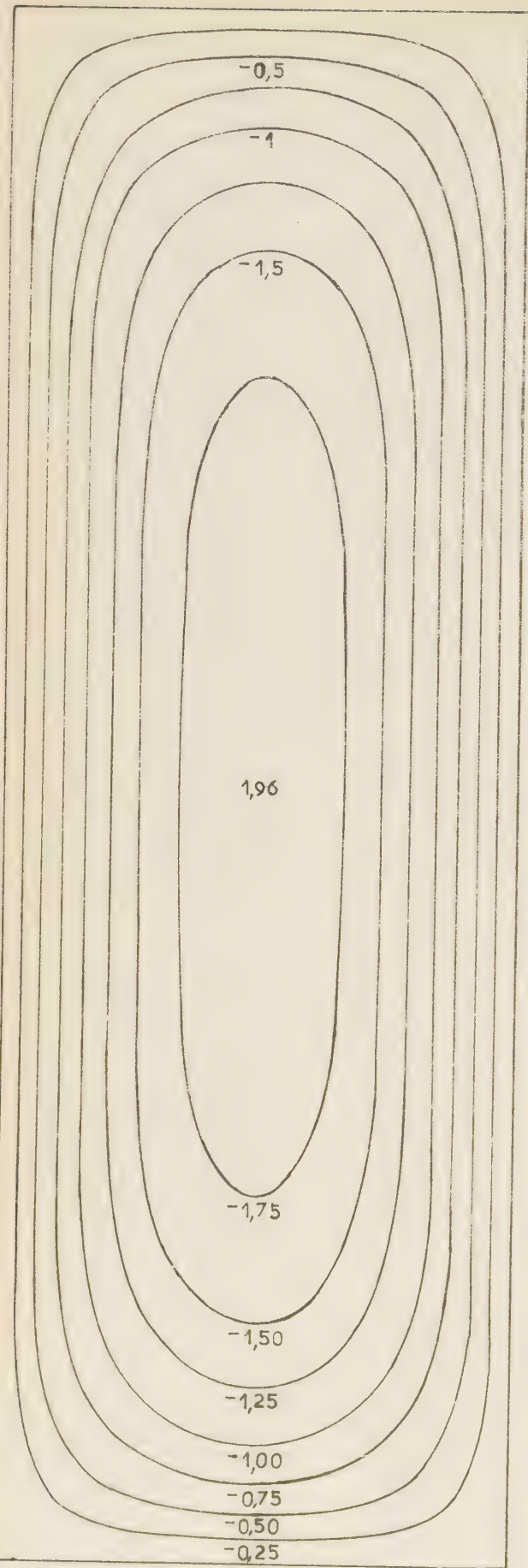
Comme précédemment, nous construisons au graphe 2-a les courbes  $\varphi = Cte$  pour

$\varphi_0 = 0,25 ; 0,50 ; 0,75 ; 1,00 ; 1,25 ; 1,50 ; 1,75$ .

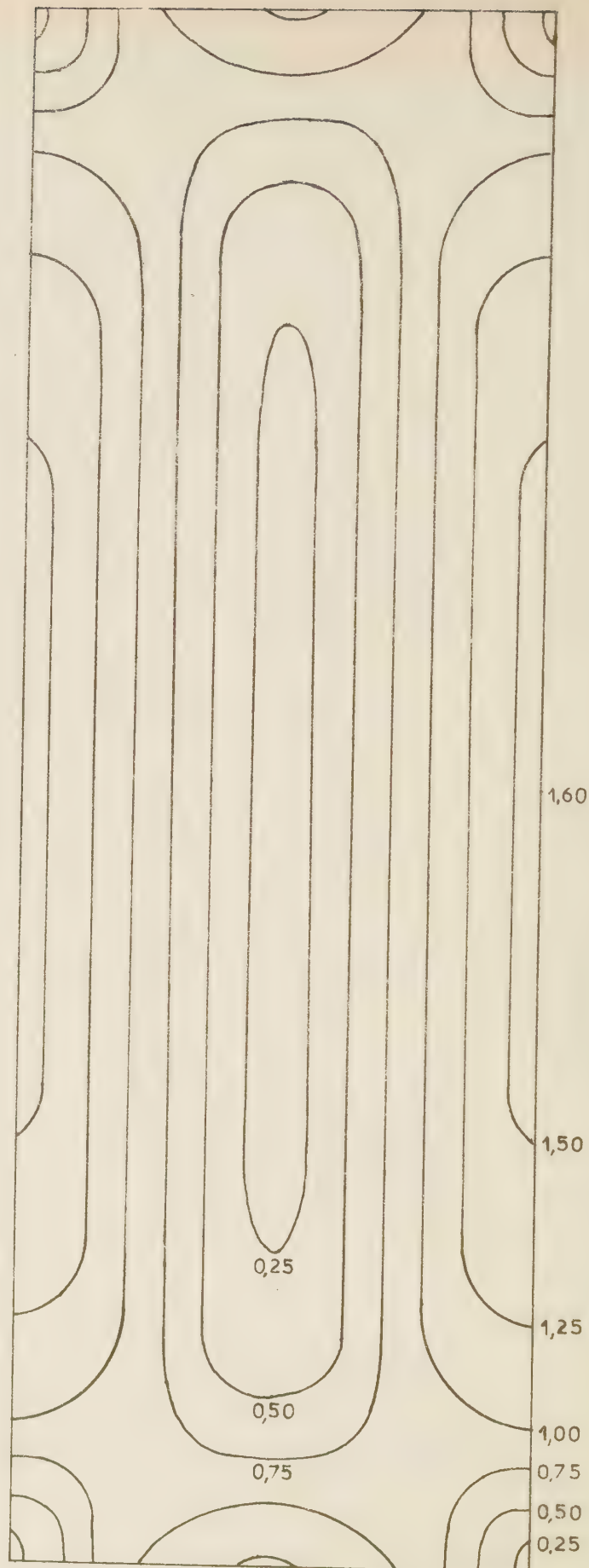
Ces courbes, qui correspondent aux lignes de niveau dans l'analogie avec la membrane, ont la forme de rectangles arrondis en leurs sommets, et ces formes rectangulaires sont d'autant plus marquées que l'on se rapproche du bord de la section. A la limite, le contour rectangulaire correspond à  $\varphi_0 = 0$ . L'expression de  $\varphi$ , développée en série de Fourier ne nous permet pas de comparer qualitativement ces résultats avec la théorie.

Si nous comparons le présent diagramme des lignes  $\varphi = Cte$ , à celui de la section elliptique, nous concevons fort bien l'évolution des courbes d'une section à l'autre. Par ailleurs, les courbes sont les plus proches l'une de l'autre lors de leur intersection avec le petit axe du rectangle. Nous pouvons en conclure que c'est en ce lieu que la contrainte est maximum.

| X (cm) | Y (cm) | $\varphi$ | $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ | $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ |
|--------|--------|-----------|----------------------------------------|---------------------------------------|
| 0      | 0      | - 1,9628  | 0                                      | 0                                     |
| 0      | 0,5    | - 1,8407  | 0                                      | 0,48668                               |
| 0      | 1      | - 1,4738  | 0                                      | 0,97708                               |
| 0      | 1,5    | 0,8604    | 0                                      | 1,47627                               |
| 0      | 2      | 0         | 0                                      | 1,59202                               |
| 0,5    | 0      | - 1,9600  | - 0,01298                              | 0                                     |
| 0,5    | 0,5    | - 1,8381  | - 0,01017                              | 0,4858                                |
| 0,5    | 1      | - 1,4718  | - 0,0095                               | 0,9767                                |
| 0,5    | 1,5    | - 0,8593  | - 0,0046                               | 1,4742                                |
| 0,5    | 2      | 0         | 0                                      | 1,5897                                |
| 1      | 0      | - 1,9528  | - 0,02520                              | 0                                     |
| 1      | 0,5    | - 1,8296  | - 0,02215                              | 0,4831                                |
| 1      | 1      | - 1,4657  | - 0,01779                              | 0,9730                                |
| 1      | 1,5    | - 0,8558  | - 0,00990                              | 1,4675                                |
| 1      | 2      | 0         | 0                                      | 1,5826                                |
| 1,5    | 0      | - 1,9321  | - 0,0462                               | 0                                     |
| 1,5    | 0,5    | - 1,8114  | - 0,0405                               | 0,4780                                |
| 1,5    | 1      | - 1,4537  | - 0,0279                               | 0,9620                                |
| 1,5    | 1,5    | - 0,8494  | - 0,0168                               | 1,4553                                |
| 1,5    | 2      | 0         | 0                                      | 1,5694                                |
| 2      | 0      | - 1,9007  | - 0,0669                               | 0                                     |
| 2      | 0,5    | - 1,7891  | - 0,0600                               | 0,4699                                |
| 2      | 1      | - 1,4379  | - 0,0473                               | 0,9512                                |
| 2      | 1,5    | - 0,8390  | - 0,0252                               | 1,4357                                |
| 2      | 2      | 0         | 0                                      | 1,5481                                |
| 2,5    | 0      | - 1,8504  | - 0,1273                               | 0                                     |
| 2,5    | 0,5    | - 1,7505  | - 0,0964                               | 0,4574                                |
| 2,5    | 1      | - 1,4195  | - 0,0712                               | 0,9416                                |
| 2,5    | 1,5    | - 0,8231  | - 0,0400                               | 1,4054                                |
| 2,5    | 2      | 0         | 0                                      | 1,5154                                |
| 3      | 0      | - 1,7758  | - 0,1663                               | 0                                     |
| 3      | 0,5    | - 1,6927  | - 0,1442                               | 0,4384                                |
| 3      | 1      | - 1,3861  | - 0,0977                               | 0,9254                                |
| 3      | 1,5    | - 0,7990  | - 0,0801                               | 1,3599                                |
| 3      | 2      | 0         | 0                                      | 1,4661                                |
| 3,5    | 0      | - 1,6841  | - 0,2286                               | 0                                     |
| 3,5    | 0,5    | - 1,6063  | - 0,2130                               | 0,4109                                |
| 3,5    | 1      | - 1,5218  | - 0,1725                               | 0,8517                                |
| 3,5    | 1,5    | - 0,7631  | - 0,0895                               | 1,2919                                |
| 3,5    | 2      | 0         | 0                                      | 1,3627                                |
| 4      | 0      | - 1,5472  | - 0,3457                               | 0                                     |
| 4      | 0,5    | - 1,4721  | - 0,3180                               | 0,3701                                |
| 4      | 1      | - 1,2136  | - 0,2636                               | 0,8000                                |
| 4      | 1,5    | - 0,7095  | - 0,0967                               | 1,1907                                |
| 4      | 2      | 0         | 0                                      | 1,2835                                |
| 4,5    | 0      | - 1,3383  | - 0,4843                               | 0                                     |
| 4,5    | 0,5    | - 1,2883  | - 0,4640                               | 0,3114                                |
| 4,5    | 1      | - 1,0582  | - 0,3801                               | 0,6816                                |
| 4,5    | 1,5    | - 0,6292  | - 0,2021                               | 1,0398                                |
| 4,5    | 2      | 0         | 0                                      | 1,1217                                |
| 5      | 0      | - 1,0629  | - 0,7108                               | 0                                     |
| 5      | 0,5    | - 1,0081  | - 0,6915                               | 0,2295                                |
| 5      | 1      | - 0,8335  | - 0,5586                               | 0,5519                                |
| 5      | 1,5    | - 0,5074  | - 0,3120                               | 0,8142                                |
| 5      | 2      | 0         | 0                                      | 0,8818                                |
| 5,5    | 0      | - 0,6276  | - 1,0629                               | 0                                     |
| 5,5    | 0,5    | - 0,5968  | - 1,0081                               | 0,1226                                |
| 5,5    | 1      | - 0,4996  | - 0,8335                               | 0,2675                                |
| 5,5    | 1,5    | - 0,3172  | - 0,5070                               | 0,4765                                |
| 5,5    | 2      | 0         | 0                                      | 0,5264                                |
| 6      | 0      | 0         | - 1,2552                               | 0                                     |
| 6      | 0,5    | 0         | - 1,1936                               | 0                                     |
| 6      | 1      | 0         | - 0,9996                               | 0                                     |
| 6      | 1,5    | 0         | - 0,6344                               | 0                                     |
| 6      | 2      | 0         | 0                                      | 0                                     |



$\varphi = c \cdot e$



$\tau = c \cdot e$

Considérons à présent, le cas où le rectangle admet une longueur bien supérieure à la largeur, donc, dans le cas d'une section rectangulaire très allongée. En première approximation nous pouvons conclure qu'à partir d'une distance des extrémités égale à la largeur (ou épaisseur), les lignes  $\varphi = Cte$  sont sensiblement parallèles à l'axe du rectangle. Ceci corrobore l'analogie de la membrane uniformément chargée, et son application au cas de profilés.

### 3-7-2 Diagramme $\tau = Cte$

Ayant déterminé en tout noeud du maillage,  $\tau$  à partir de  $\tau_{xy}$  et  $\tau_{yz}$ , nous construisons au graphe II-b les courbes  $\tau = Cte$ .

Le diagramme qui en résulte montre que  $\tau$  est nul au centre et aux sommets de la section. La contrainte est maximum au milieu des grands côtés du rectangle, et ce maximum est inférieur au maximum de la section elliptique (1,60 contre 1,80).

Quant aux courbes d'égale contrainte, elles sont parallèles aux grands côtés du rectangle jusqu'à une distance du petit côté égale à la longueur de celui-ci, sensiblement. Au voisinage de l'extrémité elles prennent la forme indiquée sur le diagramme.

Au milieu du petit côté du rectangle, nous trouvons un "maximum relatif" où  $\tau = 1,255$ . Ceci s'explique très bien. Dans le cas où le rectangle deviendrait un carré, les deux maximum seraient alors égaux et le diagramme serait symétrique relativement aux diagonales.



## CHAPITRE IV

### ESSAIS DE TRACTION. DETERMINATION DU MODULE D'YOUNG

#### 4-1 PREAMBULE

Les expériences faites dans les chapitres qui suivent ont utilisé des éprouvettes en caoutchouc naturel vulcanisé, commercialisé sous le qualificatif "gomme rouge n° 7". Elles ont pour but de déterminer les valeurs du module d'Young  $E$ , du coefficient de Poisson  $\nu$ , du module de rigidité à la torsion  $G$ . Compte tenu de ce que le caoutchouc est un haut polymère subissant de grandes déformations, et que d'autre part il n'est pas linéairement élastique, nous avons dû donner à certains passages des développements initialement non prévus, et sortir d'une étude purement mécanique afin de donner une interprétation aux phénomènes observés. Nos travaux en ce sens continuent par ailleurs.

Les expériences ont été faites à température ambiante, donc sensiblement constante, et de telle sorte que les efforts auxquels ont été soumises les éprouvettes étant appliqués lentement, ils ~~ne~~ donnent lieu à ~~aucun~~<sup>des</sup> échanges de chaleur avec l'extérieur *relativement faibles, dont nous ne tiendrons pas compte.*

## 4-2 CONSTITUTION CHIMIQUE DES CAOUTCHOUCS

Les caoutchoucs sont essentiellement constitués par un agrégat de macromolécules organiques linéaires dont les propriétés pratiques sont souvent améliorées par des adjuvants. A l'état de complète extension, la macromolécule linéaire ou monodimensionnelle est une chaîne formée d'atomes de carbone dont les centres forment une ligne brisée en zigzag régulier, ces atomes portant en général des atomes ou radicaux latéraux (6). Les éléments géométriques de cette ligne, angles et longueurs des côtés, ont des valeurs bien déterminées selon la nature des atomes. D'une façon générale (7), la macromolécule a une longueur du micron ou du 1/10 de micron, longueur environ égale à 1000 fois son épaisseur. C'est un édifice très stable car les liaisons entre atomes sont covalentes.

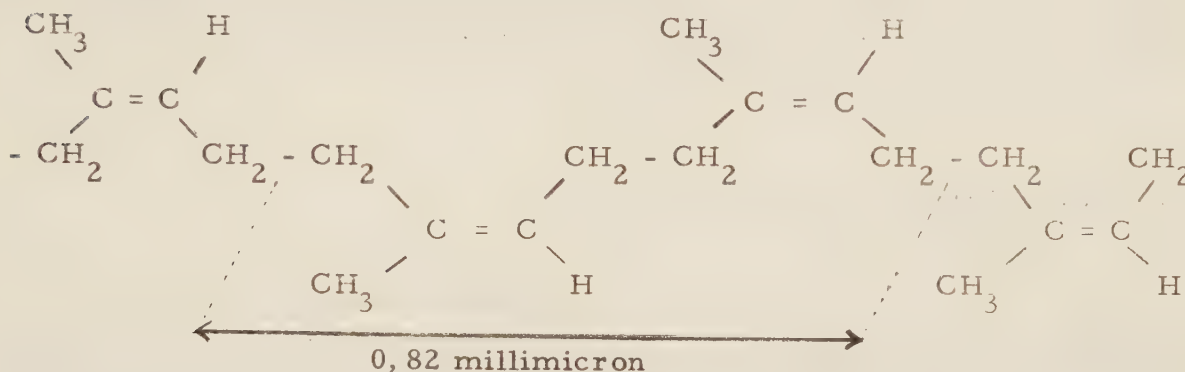
Le solide est constitué par un ensemble de molécules de différente longueur, disposées parallèlement les unes aux autres, à une distance quasi constante. La cohésion est assurée par des forces d'attraction agissant entre les molécules. La macromolécule linéaire peut aussi présenter une structure désordonnée et s'enrouler d'une façon quelconque et extrêmement variée, par suite de la libre rotation de la molécule autour des liaisons covalentes du squelette moléculaire.

Un grand nombre de composés linéaires donnent des diagrammes de diffraction aux rayons X, analogues à ceux relatifs aux métaux. On dit que la substance est cristalline. Chaque macromolécule a alors une disposition ordonnée et les diverses molécules sont disposées régulièrement les unes par rapport aux autres. L'état de complète extension réalise le mieux la structure cristalline.

Quant aux substances à structure désordonnée, le diagramme présente un halo diffus caractéristique des éléments amorphes. En fait, les composés linéaires cristallins donnent généralement des diagrammes de diffraction moins nets que ceux des métaux, et l'on en déduit qu'une même chaîne macromoléculaire traverse plusieurs domaines cristallins et amorphes successifs, la transition étant continue.

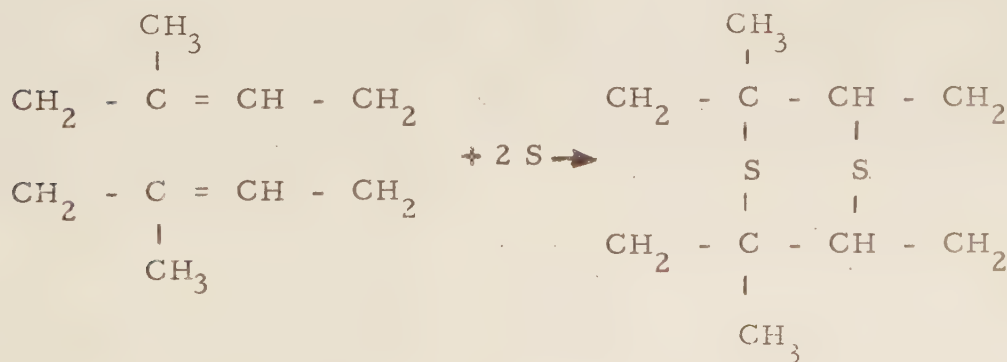
Les macromolécules linéaires constituant les substances élastomères sont pelotonnées et enchevêtrées de façon désordonnée, et réunies par des liaisons transverses ou "ponts", lesquelles empêchent les glissements par viscosité. Si l'on tire sur une telle substance, les macromolécules se déplient progressivement grâce à la rotation des segments du squelette macromoléculaire, et tendent vers l'état de complète extension en s'orientant suivant la direction de l'effort de traction. Quand ce dernier cesse, les macromolécules reprennent quasi spontanément une forme pelotonnée analogue à la disposition initiale.

Pour ce qui est des considérations purement chimiques se rapportant au caoutchouc naturel, disons que c'est un hydrocarbure  $(C_{10}H_{16})_n$  qui présente deux liaisons éthyléniques par chaque motif  $C_{10}H_{16}$ . C'est un composé macromoléculaire linéaire auquel on attribue la structure suivante :



Le caoutchouc n'est pas un polymer bien défini. La valeur moyenne de  $n$  dépend des conditions d'obtention du produit et varie de 200 à 2500.

Mais le caoutchouc naturel ne présente le phénomène de haute élasticité que dans certaines limites de températures assez étroites. Au-dessous de  $4^{\circ}C$  il devient dur et cassant, tandis qu'au-delà de  $30^{\circ}C$ , il est doué de plasticité et devient visqueux. Aussi, pour élargir son domaine d'application on fait subir aux gommages brutes le traitement de vulcanisation. Cette dernière donne au caoutchouc ses propriétés élastiques usuelles. Elle s'opère à chaud vers  $150^{\circ}C$  en chauffant le caoutchouc avec 7 à 10 % de soufre, et en présence de catalyseurs d'accélération. Le soufre réagit sur le caoutchouc naturel à la hauteur des doubles liaisons et forme des ponts entre deux molécules voisines. Le mécanisme serait, en première approximation le suivant :



La présence de ces ponts rend le caoutchouc élastique. Si l'on augmente progressivement la proportion de soufre, la haute élasticité ~~diminue~~. Pour une dose de 30 % par exemple, on obtient une substance dure et rigide, c'est l'ébonite.

Disons enfin que suivant les applications envisagées, on incorpore au caoutchouc naturel des charges (moins de carbone en particulier), des plastifiants, des colorants, des produits anti-oxygène... lesquelles sont parfois susceptibles de modifier notablement les propriétés mécaniques du produit obtenu.

#### 4-3 PROCEDE EXPERIMENTAL

Nos essais de traction permettent de déterminer le module d'Young du caoutchouc utilisé, mais aussi de comparer la courbe de déformation d'un échantillon vierge avec celles obtenues à partir d'éprouvettes non vierges, de faire des remarques intéressantes sur le phénomène d'hystérèse, ainsi que celui de "relaxation".

Nous travaillons sur une machine à traction AMSLER, type 02 ZH 118. Celle-ci est disposée horizontalement sur un bâti en fers profilés qui porte : à droite un indicateur de force et l'enregistreur du diagramme, ainsi que la commande ; à gauche le dispositif porte-éprouvette et, permettant son déplacement, l'arbre fileté. L'effort est appliqué au moyen de ce dernier qui déplace la tête d'amarrage mobile de la machine vers la gauche. On dispose d'une commande à main et d'une commande par moteur électrique, des poulies à gradins et un réducteur permettant d'opérer à huit vitesses de traction différentes.

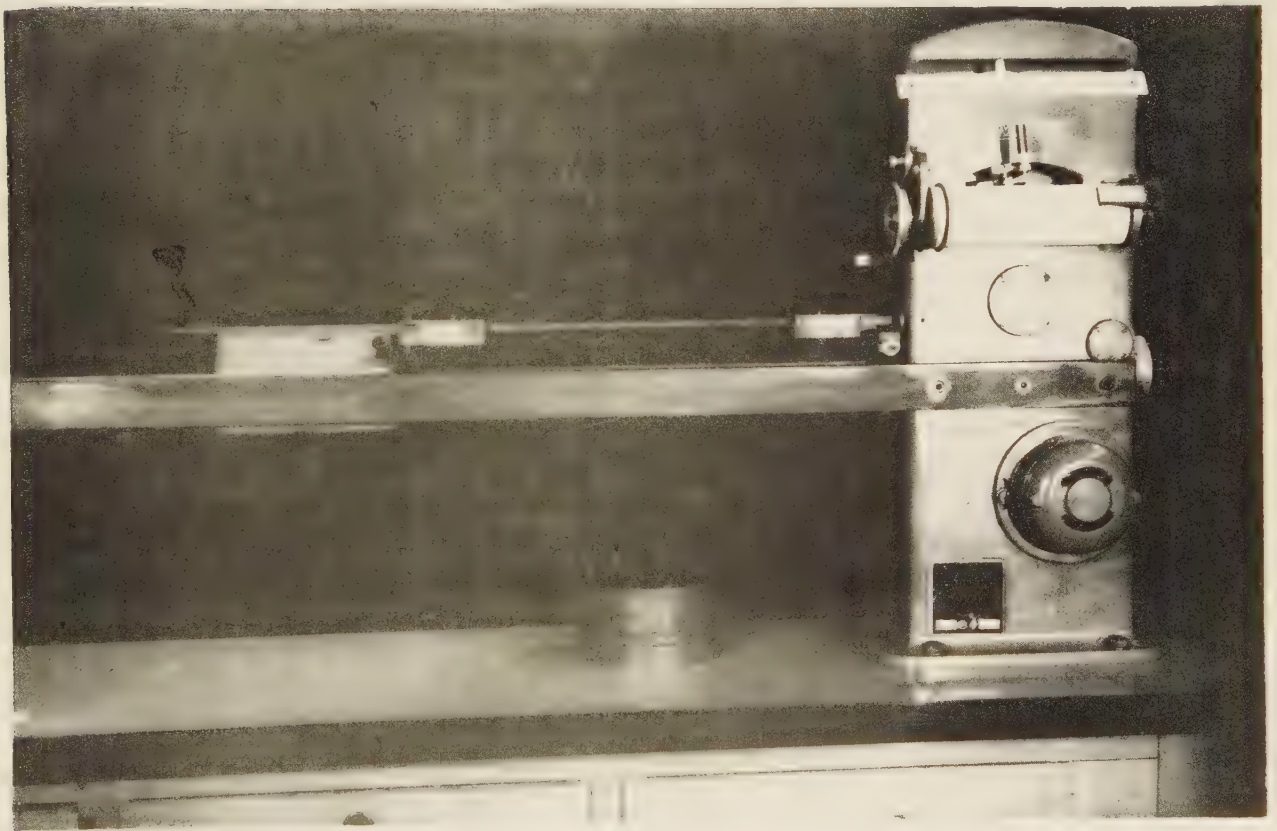
La force de traction exercée est mesurée par l'intermédiaire d'une pendule d'inclinaison. Un amortisseur hydraulique automatique amortit le retour du pendule à sa position verticale, mais n'a aucun effet sur le mouvement ascendant. Le pendule est solidaire d'une aiguille qui indique l'effort exercé sur une graduation rectiligne. La déviation du pendule est en outre enregistrée graphiquement, et l'adjonction d'une échelle transparente ainsi que d'un anneau gradué, situé à l'extrémité du cylindre enregistreur, permettent de déterminer de façon précise la mesure de l'allongement en n'importe quel point du diagramme.

Le dispositif d'amarrage que nous utilisons est constitué de deux mordaches en forme de coins, poussées dans leurs logements par des ressorts qui assurent une même pression de celle-ci sur l'éprouvette. Ces machoires étant auto-serreuses, il nous est possible d'obtenir une excellente fixation de l'éprouvette aux têtes d'amarrage.

Pour chaque essai, nous obtenons un enregistrement de la courbe de déformation en fonction de la force exercée. L'éprouvette est soumise à un effort  $F$  qui lui fait subir un allongement de l'ordre de 100 %.

Les éprouvettes utilisées sont des barres de section carrée dont les dimensions initiales sont : 20 x 10 x 10 mm. Le premier essai correspond à une barre vierge, c'est-à-dire n'ayant point encore travaillé en traction. La rupture n'étant pas atteinte, nous déchargeons la barre et celle-ci étant demeurée un moment au repos, nous effectuons un nouvel essai.

Figure 4



#### 4.4. VOLUME DE LA BARRE SOUS L'EFFET DE TRACTION

Au cours de nos calculs, nous devrions connaître, pour la barre soumise à la traction, traduisant par un allongement mesuré, la surface  $S$  sur laquelle s'exerce cette force. Or la section  $S$  nous sera très facilement accessible à partir du volume. Mais faudra-t-il savoir comment évolue le volume de la barre sous l'effet de la traction. C'est précisément le but de ce paragraphe.

Dans cet essai, les allongements sont obtenus par enregistrement, et nous mesurons au micromètre à plateaux les valeurs successives du côté  $h$  de la section. Le tableau ci-dessous résume les résultats obtenus et les graphes III et IV nous montrent les variations du côté de la barre et de sa longueur en fonction de  $F$ .

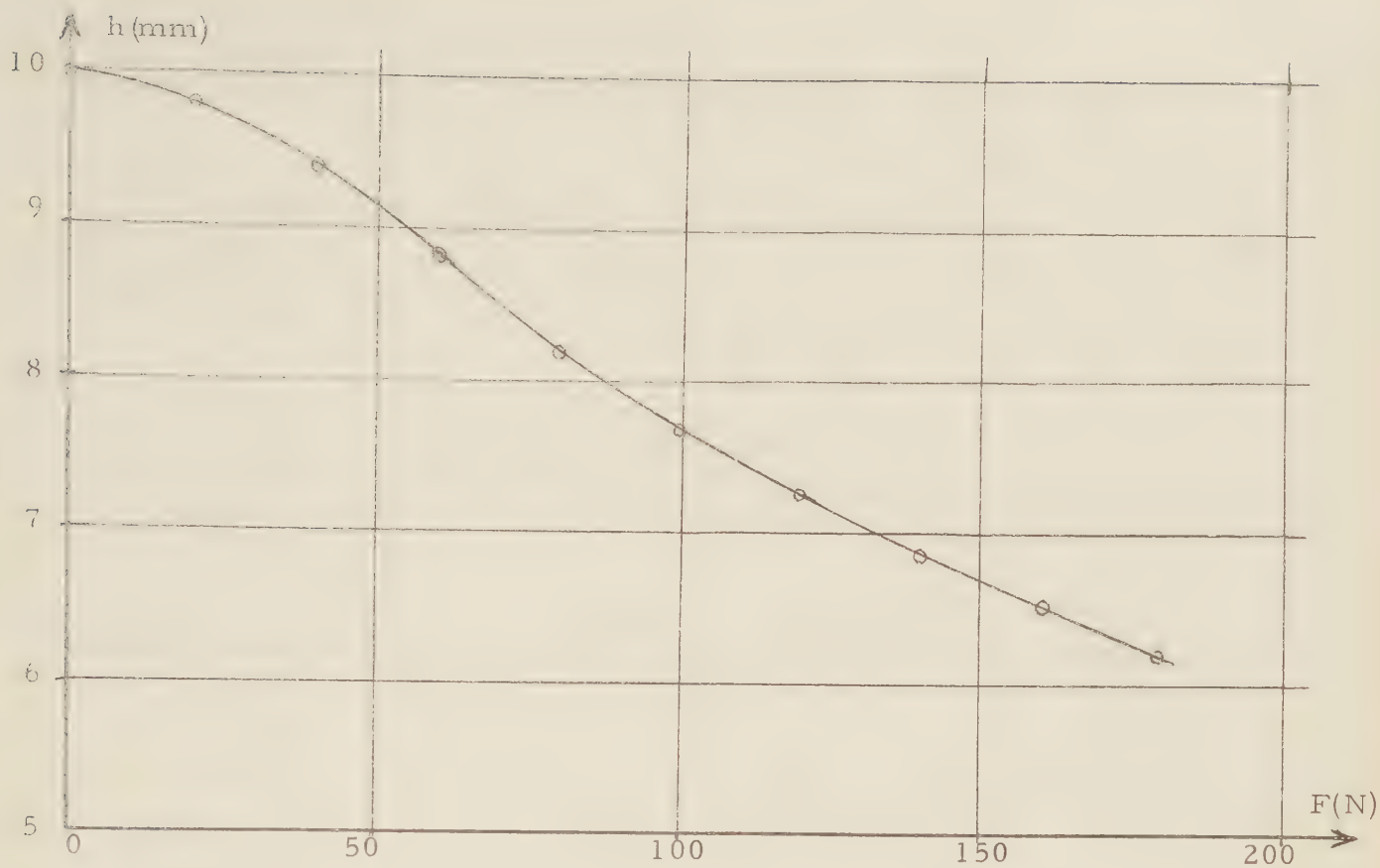
Tableau 4

| $l$ mm              | 200 | 212  | 228  | 258  | 296  | 342  | 389  | 432  | 475  |
|---------------------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $h$ mm              | 10  | 9,75 | 9,40 | 8,85 | 8,26 | 7,70 | 7,25 | 6,85 | 6,56 |
| $V$ mm <sup>3</sup> |     | 2,01 | 2,01 | 2,02 | 2,02 | 2,03 | 2,04 | 2,03 | 2,04 |

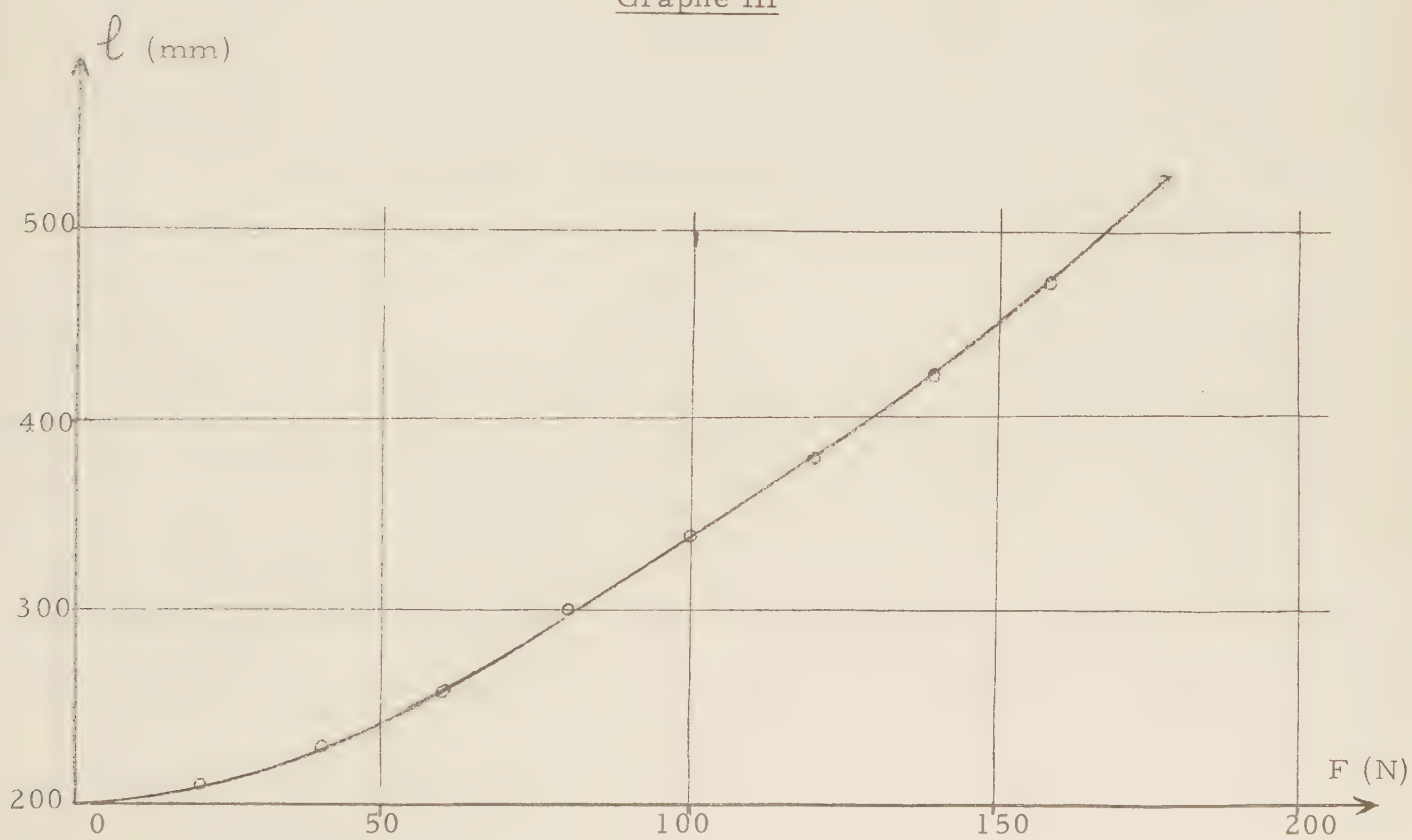
Et nous constatons dans l'intervalle d'extension qui nous intéresse (ici allongements dépassant 100 %) que la variation de volume est négligeable, toutes choses égales d'ailleurs, à savoir que dans la suite de nos expériences, nous admettrons que le volume demeure constant. L'erreur ainsi commise sera négligeable, puisque, d'après les résultats ci-dessus, elle ne saurait excéder 2 %.

#### Remarque :

Si l'on s'intéressait précisément à la variation de volume, il conviendrait de modifier la lecture des allongements  $\Delta l$ . En effet, si la mesure de  $h$  nous est fournie au 1/100 mm près, par contre, la lecture de  $l$  n'est pas, en précision le 1/5 de mm. En ce qui nous concerne, cette précision est suffisante. Il n'en serait pas ainsi dans le cas où l'on étudierait effectivement  $\Delta V = f(\sigma_x)$ . Il faudrait améliorer la précision dans la lecture de  $\Delta l$ .



Graphe III



Graphe IV

#### 4-5 CONSTRUCTION DES COURBES CONTRAINTE - DEFORMATION

$$\sigma_x = f(\epsilon_x). \text{ CALCUL DE E}$$

##### 4-5-1 Dépouillement des diagrammes d'enregistrement

A partir de la courbe d'enregistrement obtenue sous la forme  $F = f(\Delta l)$ , nous construisons la courbe universelle  $\sigma_x = f(\epsilon_x)$  avec  $\sigma_x = \frac{F}{S}$ ,  $\epsilon_x = \frac{\Delta l}{l}$ .

Etant donné l'importance des allongements, nous avons, dans les calculs qui suivent, tenu compte de la diminution de la section  $S$  en cours de traction.  $V$  étant constant, nous calculons  $S$  pour chaque  $l + \Delta l$ .

Ceci nous conduit au graphe V. La courbe n°1 correspond à la traction d'une éprouvette vierge, la courbe n°2 à la deuxième traction, la courbe n°3 à la cinquième traction.

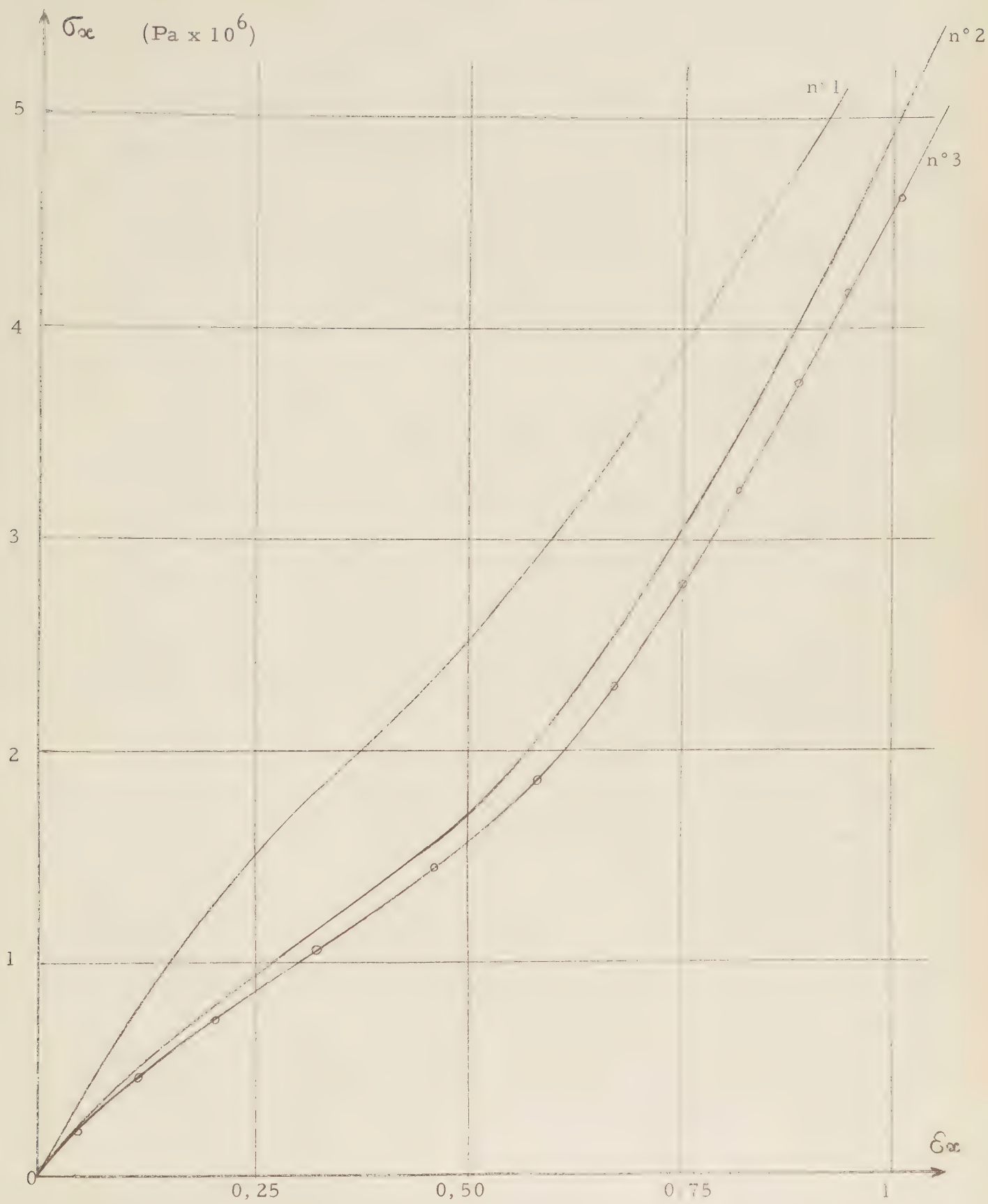
##### 4-5-2 Calcul de $E = E_S$

Puis nous calculons le module d'Young  $E$ , à partir de la relation  $E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x}$  avec  $[E] = L^{-1} M T^{-2}$ , et de la courbe n°2.  $E$  a donc les dimensions d'une contrainte.

A partir de ce dernier calcul, nous construisons la courbe  $E_S = E = f(\epsilon_x)$ , et par extrapolation, nous en tirons la valeur de  $E_S$  à l'origine.

Tableau 5

| F (N)              | 0 | 20   | 40   | 60   | 80   | 100  | 120  | 140  | 160  | 180  | 200  | 220  | 240  |
|--------------------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\sigma_x$ (M. Pa) | 0 | 0,21 | 0,45 | 0,72 | 1,06 | 1,46 | 1,89 | 2,34 | 2,80 | 3,28 | 3,78 | 4,20 | 4,80 |
| $\Delta l$ (mm)    | 0 | 10   | 24   | 42   | 66   | 92   | 116  | 134  | 150  | 164  | 178  | 190  | 204  |
| $\epsilon_x$       | 0 | 0,05 | 0,12 | 0,21 | 0,33 | 0,46 | 0,58 | 0,67 | 0,75 | 0,82 | 0,89 | 0,95 | 1,02 |
| $E_S$ (M. Pa)      |   | 4,20 | 3,75 | 3,43 | 3,21 | 3,17 | 3,26 | 3,49 | 3,74 | 4,00 | 4,25 | 4,42 | 4,70 |



Graphe V

#### 4-5-3 Détermination de $E_T$ , module d'Young tangent

Mais nous sommes également conduits à calculer  $E$  autrement.

Par la relation  $E = \frac{\sigma_x}{\epsilon_x}$ , nous calculons, comme le montre la figure 5-a, le module d'Young sécant  $E_S$ .

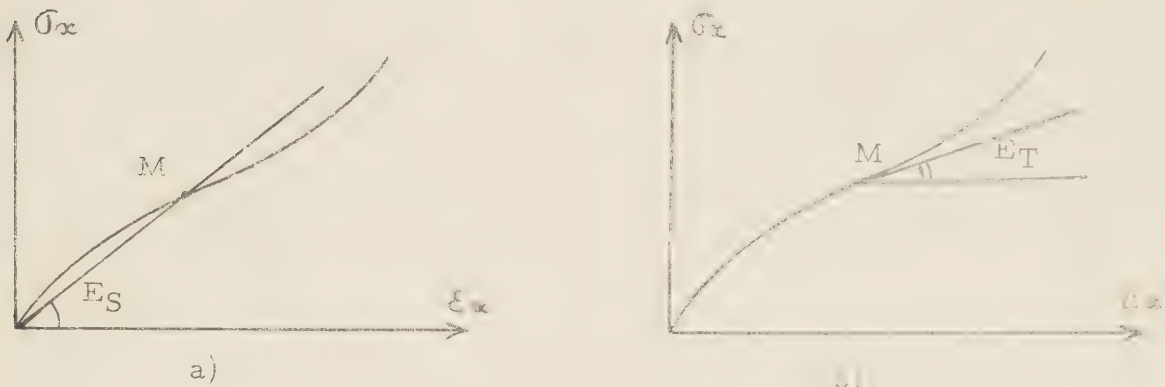


Figure 5

Or nous nous intéressons également au module d'Young tangent  $E_T$  (figure 5b). Celui-ci correspond à la dérivée de la courbe  $\sigma_x = f(\epsilon_x)$  en tout point de celle-ci.

Pour déterminer  $E_T$ , nous sommes ainsi amenés à dériver la courbe  $\sigma_x = f(\epsilon_x)$ , par la méthode des différences finies.

Le principe de la méthode consiste à assimiler, dans un intervalle  $2 \Delta x$ , la courbe  $y = f(x)$  que l'on dérive, et dont on ne connaît point l'équation, à un arc de parabole.

Le calcul de  $y'$  se fait par l'utilisation répétée de la formule

$$y'_i = \frac{A y_{i-1} + B y_i + C y_{i+1}}{2 \Delta x}$$

expression dans laquelle  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sont des coefficients numériques connus.

Leurs valeurs sont différentes suivant que l'on calcule la dérivée au point extrême gauche, au point extrême droit, ou en un point quelconque de l'intervalle de variation (a b).

Nous les résumons dans le tableau :

| $y_1$  | A   | B   | C   |
|-----------------------------------------------------------------------------------------|-----|-----|-----|
| $x_1 = a$                                                                               | - 3 | 4   | - 1 |
| $x_1 = \text{quelconque}$                                                               | - 1 | 0   | 1   |
| $x_1 = b$                                                                               | 1   | - 4 | 3   |

Ainsi, à partir de la courbe n°2, du graphe V, nous déterminons les  $\sigma_x$  correspondant à des  $\Delta\epsilon_x$  constants et, appliquons la formule

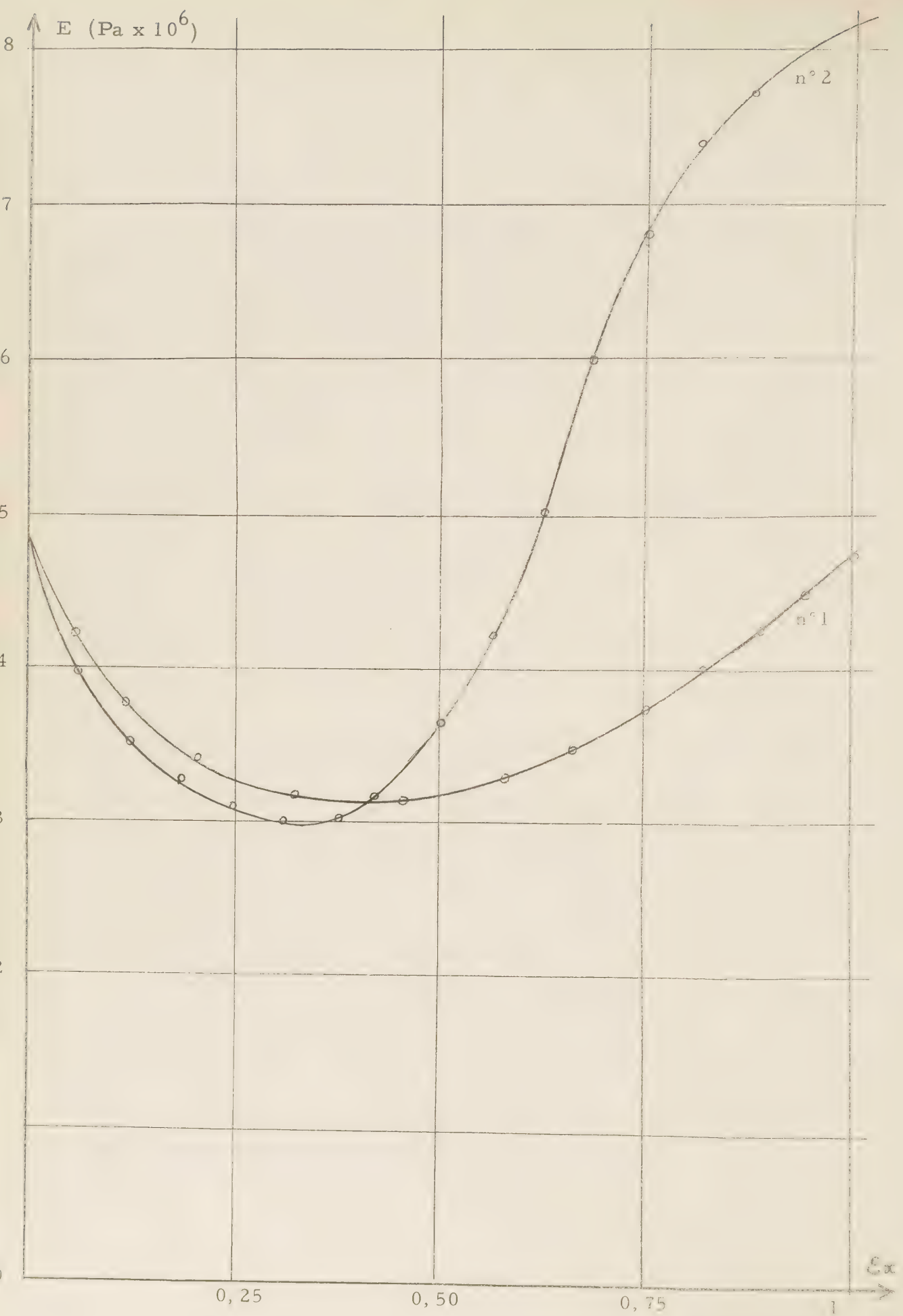
$$\sigma'_x = E_T = \frac{A \sigma_{i-1} + B \sigma_i + C \sigma_{i+1}}{2 \Delta \epsilon_x}$$

De la sorte, nous déterminons la valeur de  $E_T$  aux points envisagés. D'où le tableau de résultats ci-dessous :

Tableau 6

|                           | 0 | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    |
|---------------------------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\sigma_x$ (M. Pa)        | 0 | 0,28 | 0,49 | 0,72 | 0,91 | 1,19 | 1,28 | 1,48 | 1,67 |
| $\sigma'_x = E_T$ (M. Pa) | 0 | 5,05 | 3,90 | 3,50 | 3,36 | 3,12 | 2,97 | 2,96 | 3,12 |

|                           | 9    | 10   | 11   | 12   | 13   | 14   | 15   | 16   |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\sigma_x$ (M. Pa)        | 1,94 | 2,20 | 2,57 | 2,95 | 3,42 | 3,88 | 4,38 | 4,88 |
| $\sigma'_x = E_T$ (M. Pa) | 4,20 | 5,05 | 6,00 | 6,80 | 7,40 | 7,70 | 8,05 | 8,15 |



4-5-4 Construction des courbes  $E_T = f(\xi x)$   $E_S = f(\xi x)$

Les résultats des tableaux 5 et 6 ci-dessus nous ont permis de construire au graphe VI les courbes  $E_S = f(\xi x)$  et  $E_T = f(\xi x)$ .

Nous constatons que ces deux courbes ont même origine. En effet l'extrapolation de  $E_S = f(\xi x)$  pour  $\xi x = 0$ , correspond à la valeur  $E_T$  trouvée précédemment. Ce résultat est normal.  $E_T$  est ensuite inférieur à  $E_S$ .

Puis pour  $\xi x$  voisin de 0,40,  $E_T$  devient très supérieur à  $E_S$ .

Pour  $\xi x$  voisin de 1, on peut considérer que  $E_T = 2 E_S$ .

Par l'imagination, nous pouvons extrapoler relativement à  $\xi x > 1$ . En nous basant sur l'allure des courbes,  $\sigma x = f(\xi x)$ ,  $E_T$  tend vers une valeur constante, voisine de  $8.10^6$  Pa. Et  $E_S$  tendra, par valeurs inférieures vers  $E_T$ .

Le schéma ci-contre (figure 6) donne l'allure prévisible des 2 courbes pour  $\xi x > 1$ .

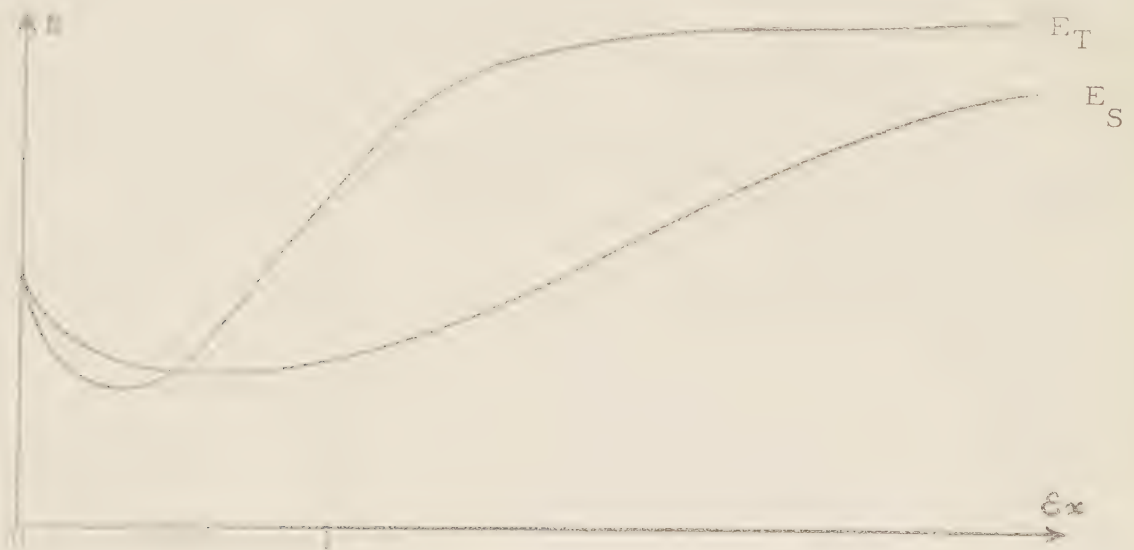


Figure n° 6

## 4-6 INTERPRETATION CHIMIQUE

### 4-6-1 Equation théorique $F = f(\epsilon)$

Nous savons que le matériau est un caoutchouc vulcanisé, c'est-à-dire formé par des chaînes d'atomes longues et flexibles qui forment des réseaux par l'établissement de liaisons, ou "ponts", avec les chaînes voisines. BUCKLER (18) compare une telle structure à celle d'un filet emmêlé, ayant des mailles de différentes tailles. Chaque maillon étant animé d'une agitation thermique qui le maintient partiellement enroulé sur lui-même ; il est susceptible de s'allonger sous l'effet de tension. On peut exprimer la relation tension allongement, pour un vulcanisat de caoutchouc, sous la forme de l'équation :

$$F = g N R T \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left( 1 - \frac{2 M}{M_c} \right)$$

avec

- F : force d'extension
- g : facteur de correction tenant compte des défauts du réseau
- R : constante des gaz
- T : température absolue
- $\lambda$  : extension =  $1 + \epsilon$
- $M_c$  : poids moléculaire moyen en nombre entre liaisons pontales
- M : poids moléculaire moyen en nombre des chaînes primaires

Certains auteurs, tels KOTANI FURUKAWA (19) écrivent F sous la forme suivante :

$$F = F_0 + R T \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

où  $F_0$  est un facteur de correction.

Ces relations font intervenir de nombreux paramètres et la vérification expérimentale sort du cadre de notre étude. Nous ne faisons que les citer. Remarquons simplement que pour un caoutchouc donné, et toutes choses égales par ailleurs, on peut écrire la relation  $F = f(\lambda)$ , sous la forme

$$F = \left( \lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \cdot Cte, \text{ avec } \lambda = 1 + \epsilon$$

#### 4-6-2 Effet Mullins

Nous remarquons que les diagrammes contrainte - déformation sont différents suivant qu'il s'agit d'un échantillon vierge, ou d'un échantillon ayant déjà été soumis à des déformations. Le module, pour une déformation donnée est toujours inférieur au module déterminé lors de la première expérience, celle-ci n'étant pas reproductible, comme le montre le graphe V. Ce phénomène est connu sous le nom d'effet Mullins (20). On attribue généralement cet effet à une rupture des liaisons entre le noir de carbone ou le soufre, donc des ponts, et des portions du réseau qui ont été fortement étirées aux déformations imposées (21 - 22). L'amplitude de cet effort est plus ou moins influencé par presque tous les facteurs pouvant varier au cours de la préparation et de l'évaluation de l'échantillon. Elle diffère évidemment d'un caoutchouc à l'autre.

Une étude de l'effet Mullins permet de penser que le module initial ne donne pas une indication très valable du module après ramollissement par tension, car une telle mesure de module se trouve liée à une structure qui n'est qu'éphémère, et disparaît dans les conditions d'utilisation. Aussi est-il plus fondé de déterminer le module "dégradé", c'est-à-dire celui déterminé sur des échantillons non vierges, car nous remarquons par ailleurs qu'après plusieurs essais les courbes contrainte - déformation deviennent sensiblement identiques. Toutes les déterminations de "constantes" intervenant dans nos travaux concernent des éprouvettes non vierges.

#### 4-6-3 Etude qualitative des déformations

Intéressons nous maintenant à la déformation subie par une éprouvette au cours d'un essai de traction. On admet que dans le cas de mélanges classiques pure gomme (23 - 24), le début de l'extension fait que certaines macromolécules atteignent leur allongement limite et sont susceptibles de se rompre bien avant que la majorité des autres macromolécules aient été allongées de façon appréciable. Ceci est dû à l'état d'enchevêtrement inévitable provenant de la réticulation désordonnée du caoutchouc (25). Non seulement il y a distribution désordonnée des longueurs des segments, mais également enchevêtrement des chaînes, formation de boucles et existence de circuits fermés courts entre les parties adjacentes du réseau.

Mais alors que ces chaînes ont atteint leur point de rupture, intervient un autre phénomène dans l'âme du matériau : la cristallisation. Les cristallites ainsi formées, agissant telles des liaisons, répartiraient la tension entre plusieurs chaînes. On a également avancé que les cristallites minimisent les dommages causés par les ruptures de chaînes, en créant une hétérogénéité qui s'oppose à la déchirure. De récentes théories

formulées par COOPER (26) et BROWN (27), suggèrent que lorsqu'un segment de chaîne est allongé et soumis à une forte tension, certaines liaisons pontales sont détruites avant que n'intervienne la rupture, et qu'elles se reconstituent ailleurs, lorsque le réseau est étiré. Dans ce concept, les chaînes normalement courtes peuvent subsister. Le déchirement est retardé et les chaînes moyennes s'allongent pour participer à l'effort.

A la lumière de ceci, nous pouvons admettre que les courbes  $\sigma = f(\epsilon)$  traduisent 3 phases distinctes. La première partie peu marquée pour notre type de caoutchouc, se situant jusqu'à  $\epsilon < 0,25$ , correspondrait au début de cristallisation. Certaines mailles courtes ou emmêlées étant étirées jusqu'à leur point de rupture. Puis pour des  $\epsilon$  compris entre 0,25 et 0,75, la diminution notable du module d'Young corrobore la période de plus grande cristallisation, durant laquelle seraient également détruites certaines liaisons pontales. A la fin de cette période, la majorité des chaînes aurait pris une direction voisine de celle de la force de traction.

Dès lors, et c'est le début de la troisième période, on note un accroissement notable du module, ceci étant dû au fait que les macromolécules ont atteint leur extrême limite. La rupture aura lieu lorsque le mécanisme protecteur sera hors d'état d'agir en raison de l'épuisement des chaînes disponibles pour la formation des cristallites.

Disons que les recherches actuelles s'orientent également vers l'étude des propriétés tension - allongement à partir des fonctions thermodynamiques du matériau considéré (28) et bien des points semblent ne pas être encore parfaitement élucidés (29).

#### 4-6-4 Résultats quantitatifs. Comparaisons.

Les caractéristiques d'un polymère sont essentiellement intrinsèques à celui-ci. Elles varient pour un même matériau selon, nous l'avons vu, de nombreux paramètres : procédés de mise en oeuvre, conditions d'essais, etc... Aussi, nous ne pouvons les situer qu'en ordre de grandeur relativement à celles trouvées dans la littérature.

Il ressort de nos expériences que pour des allongements allant jusqu'à 100 %, le module d'Young, que nous appellerons module statique étant donné les conditions d'essai (18), à savoir vitesses de traction extrêmement lentes, par opposition au module dynamique déterminé à partir de cycles. extension - relâchement relativement rapides, varie entre 3 M Pa et 8 M Pa, soit sensiblement entre 30 et 80 kg/cm<sup>2</sup>. Ces valeurs se situent dans la gamme normale des valeurs de module déterminées dans les conditions similaires.

Nous ne nous sommes pas intéressés directement au phénomène de rupture. Des quelques essais à grands allongements que nous avons effectués, il ressort que la rupture du caoutchouc sur lequel nous travaillons se ferait pour des allongements de l'ordre de 300 %, voir 400 %, et correspondrait à une résistance à la rupture de l'ordre de 200 kg/cm<sup>2</sup> soit 20 M Pa.

#### 4-7 PHENOMENES DE RELAXATION, HYSTERESIS

##### 4-7-1 Méthodes d'essais

Nous nous proposons de mettre en évidence le phénomène de relaxation, c'est-à-dire d'étudier la variation du couple contrainte - déformation en fonction du temps. Pour cela nous utilisons une éprouvette du type de celles décrites précédemment. La barre est mise en charge progressivement, comme dans les expériences précédentes, et pour des valeurs données de  $F$ , nous arrêtons la traction et, pour un allongement ainsi fixé, considérons la variation de  $F$  en fonction du temps. Puis au bout de 5' d'arrêt, nous reprenons la traction.

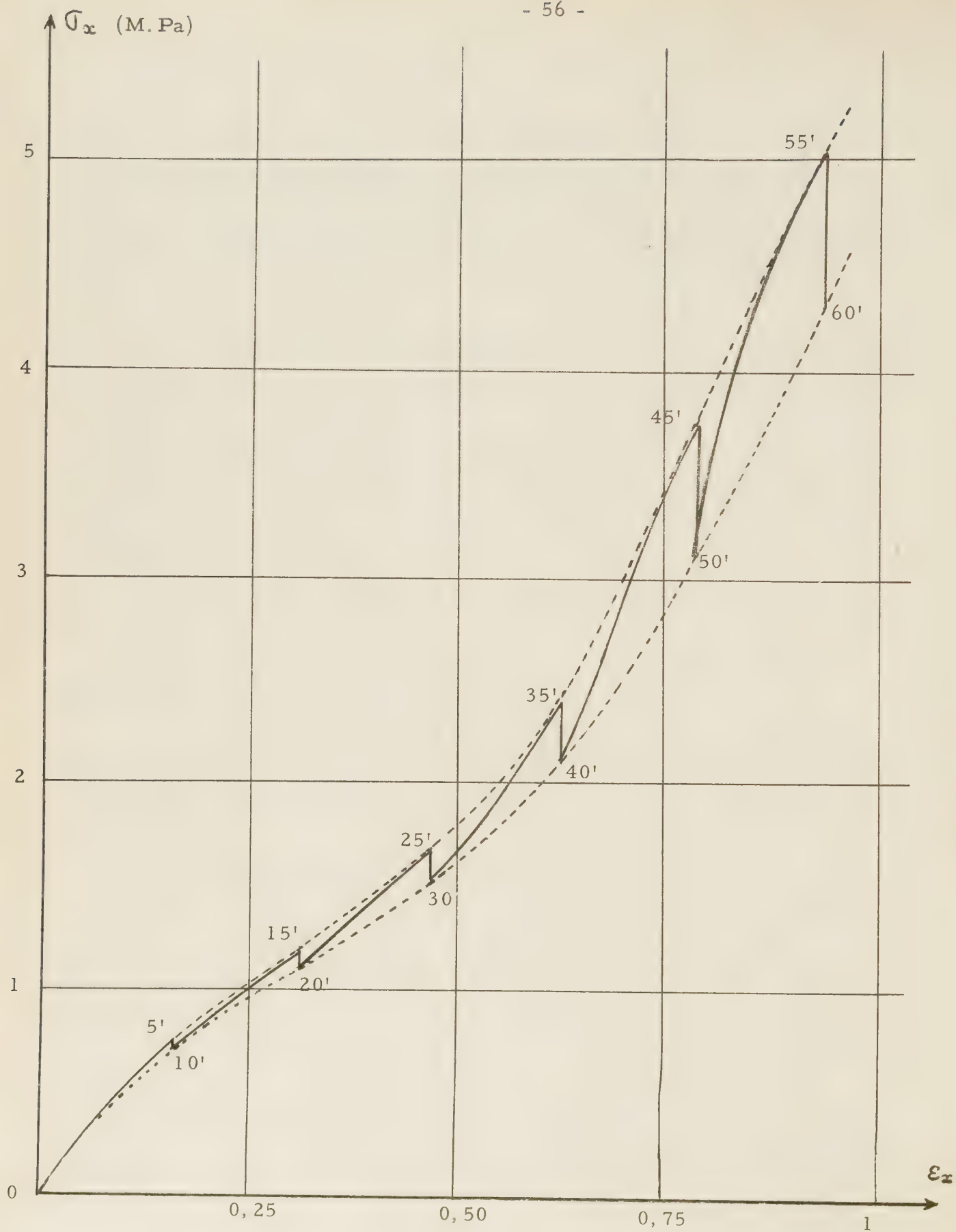
##### 4-7-2 Courbes expérimentales

De la sorte, nous avons procédé à 6 arrêts et avons obtenu les résultats représentés au graphe VII par la courbe  $\overline{C} = f(\xi, t)$ . Nous avons noté, à chaque arrêt ou reprise de l'allongement, c'est-à-dire à chaque discontinuité de la courbe, les temps correspondants. Nous ne faisons qu'explicitier, au cours de nos travaux le présent phénomène. Il serait intéressant d'en faire une étude expérimentale plus approfondie, et notamment de s'intéresser aux relations  $F = f(t)$  c'est-à-dire d'étudier la loi de décroissance de  $F$ , ou reprise élastique. Mais une telle étude sortait du cadre de nos recherches.

##### 4-7-3 Interprétation théorique de la relaxation

Dans les conditions usuelles d'utilisation du caoutchouc, et à la température ambiante, on ignore encore en général si la relaxation est principalement causée par un vieillissement de nature chimique ou par des phénomènes physiques liés à des changements réversibles de structure.

THIRION et CHASSET (30) ont cherché à préciser les domaines de temps et de température où prédominent respectivement le vieillissement et la viscoélasticité. Il est parfois possible d'effectuer, dans certains cas, une discrimination qualitative entre les effets de vieillissement et ceux de la viscoélasticité sur les variations de tension du caoutchouc.



Grappe VII

A la suite de nombreux travaux consacrés à la relaxation par vieillissement, diverses théories ont été proposées pour ce processus. DUNN, SCANLAN et WATSON (31) ont exposé une théorie de la scission des chaînes d'un réseau moléculaire qui conduit à la loi de relation :

$$F(t) = F_0 (1 - \frac{t}{a})^b$$

où  $F$  est la force de traction à l'instant  $t$   
 $F_0$ ,  $a$ ,  $b$ , des constantes.

Lorsque les vulcanisats sont relativement stables, on utilise la relaxation linéaire approchée, obtenue à partir de la précédente après développement :

$$F(t) = F_0 (1 - \frac{t}{a})$$

Celle-ci est employée par LE FOLL (32).

W. SCHEELE et K.H. HILLME (33) sont en accord avec les résultats expérimentaux dans un large intervalle de temps, pour des températures supérieures à 65°C. La relation  $F = f(t)$  n'est cependant linéaire qu'après un certain temps de relaxation initiale, d'autant plus grand que la température est moins élevée.

Quant à la relaxation d'origine viscoélastique des vulcanisats, elle serait, selon FERRY (34) due aux déplacements coordonnés de groupes de chaînes reliées entre elles par des liaisons pontales. Cependant, cette cause est moins éclairée encore que ne l'est la précédente. Notamment, aucune théorie quantitative ne semble avoir été proposée jusqu'à présent, qui puisse rendre compte de l'extrême lenteur du phénomène. La meilleure représentation empirique de la courbe de relaxation à température ambiante serait fournie par la relation :

$$F(t) = F_0 e^{-\frac{t}{C}} - n$$

où  $F$  serait encore la force de traction au temps  $t$ ,  
 $F_0$ ,  $C$ ,  $n$  des constantes.

En conclusion, la relaxation due au vieillissement ne devenant prépondérante qu'aux températures de l'ordre de 100°C, et ce à partir d'une dizaine d'heures, les phénomènes observés au cours de nos expériences, seraient essentiellement d'origine viscoélastique. La diminution de  $F$ , en fonction du temps, pour une déformation donnée proviendrait du glissement de blocs de mailles. De tels mouvements dans l'âme de certains matériaux, étudiés mécaniquement dans les traités de Rhéologie et entre autre par REINER (8) sortent de nos présents travaux. Nous nous proposons au cours de recherches ultérieures, d'étudier plus directement ces phénomènes.



## CHAPITRE V

---

### ETUDE DU CISAILLEMENT. DETERMINATION DU COEFFICIENT

---

#### DE POISSON . CALCUL DE $G$ .

---

#### 5-1 PROCEDE EXPERIMENTAL

Le développement de ce chapitre a pour base des expériences de traction faites avec la machine AMSLER précédemment décrite sur des plaques de dimensions  $300 \times 100 \times 2$  mm<sup>3</sup>. L'éprouvette sur laquelle a été préalablement dessiné un carré dont les diagonales de 100 mm de longueur correspondent aux axes  $Ox$  et  $Oy$  est tirée suivant sa longueur, c'est-à-dire dans la direction  $Ox$ . Les photographies de la figure 7 nous montrent : en a) l'éprouvette au repos, en b) l'éprouvette chargée par  $\sigma_x$  qui lui communique une déformation longitudinale et une déformation transversale mises en évidence par les variations de  $AO$  et  $BO$ . Les études qui suivent sont faites à partir des mesures de ces deux longueurs tout au long des essais de traction identiques à ceux effectués au chapitre précédent.

#### 5-2 VARIATION DU VOLUME SOUS L'EFFET DE LA TRACTION

Nous mesurons, au cours de l'essai de traction les valeurs successives de  $L_x$   $L_y$   $L_z$ . Simultanément, nous enregistrons sur diagramme la variation  $L_x = g(F)$ .  $L_x$  et  $L_y$  sont mesurées à la précision de 2/10 de mm,  $L_z$  au 1/100 de mm.

Ceci nous permet de construire les graphes VIII, IX, X des courbes  $L_x = g(F)$   $L_y = g(F)$   $L_z = g(F)$ .

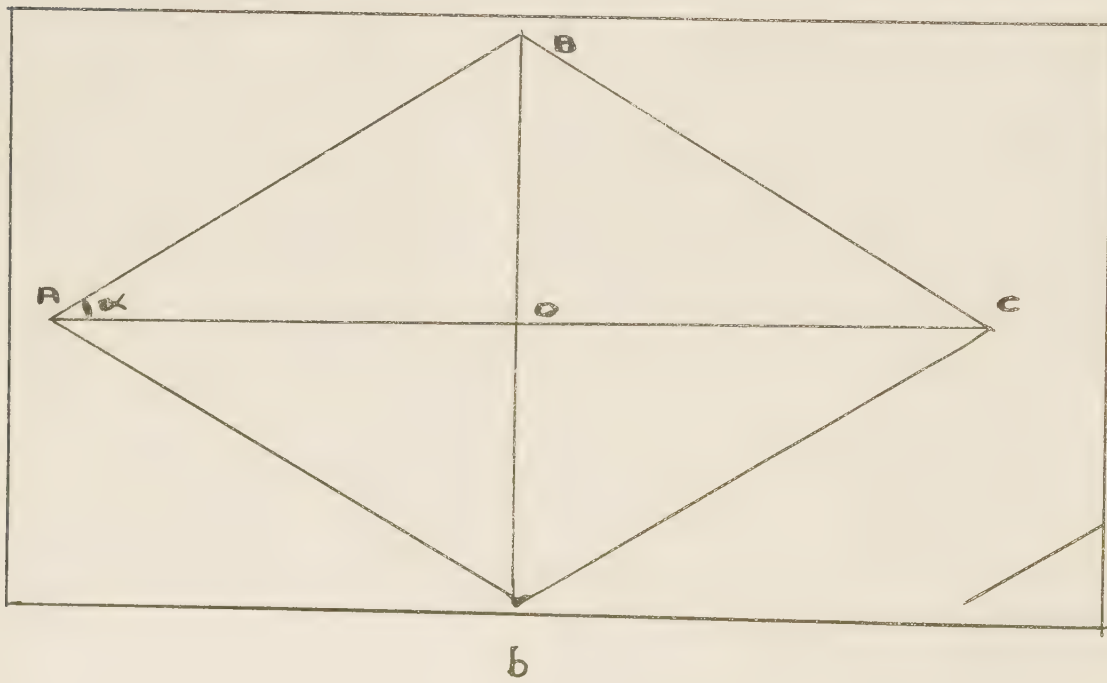
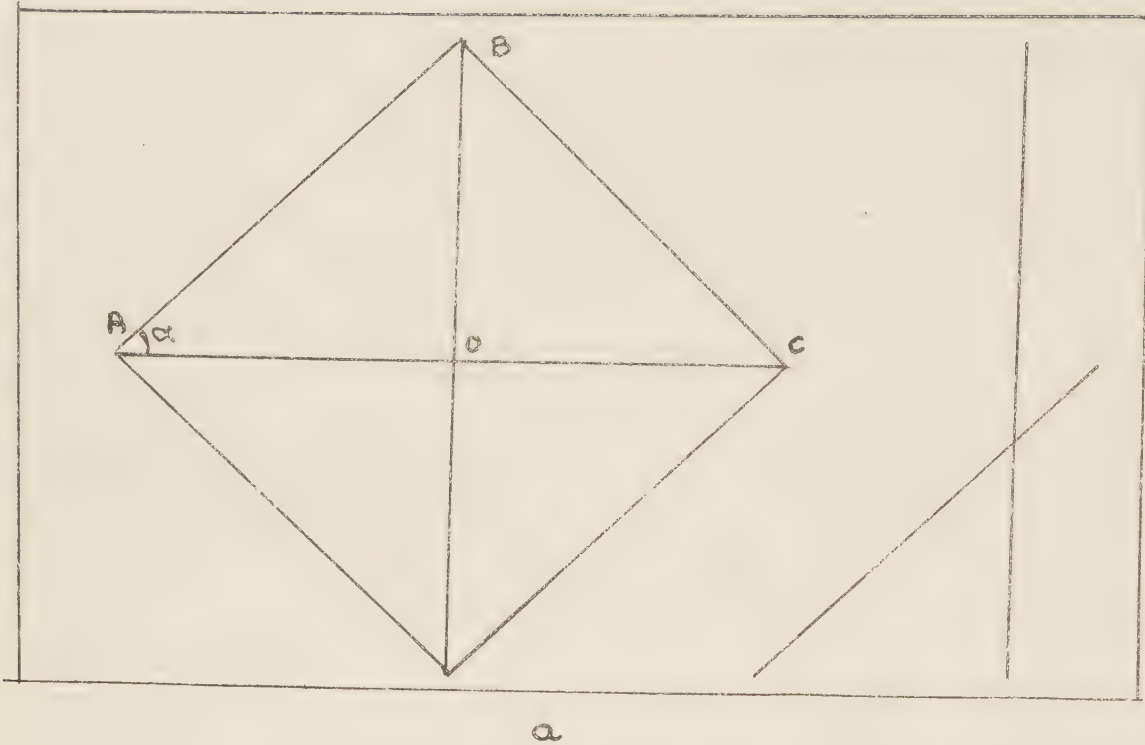


Figure 7

Grâce à elles nous pouvons éventuellement corriger certaines erreurs de lecture, ceci nous conduisant à une meilleure précision des résultats. Par ailleurs, si nous portons notre attention sur les courbes  $L_y = g(F)$  et  $L_z = g(F)$  nous constatons qu'elles ont des allures différentes, ce qui revient à dire que dans le cas où les dimensions de la section ne sont pas du même ordre de grandeur, celles-ci se "contractent" suivant des lois différentes. Cette remarque est importante. Elle nous conduira au cours d'un prochain paragraphe à définir et calculer deux valeurs du coefficient de Poisson : l'une  $\nu_y$  pour la dimension  $L_y$ , l'autre  $\nu_z$  pour  $L_z$ .

Le tableau ci-dessous nous permet de calculer les différentes valeurs du volume  $V$  au cours de nos essais.

Tableau 7

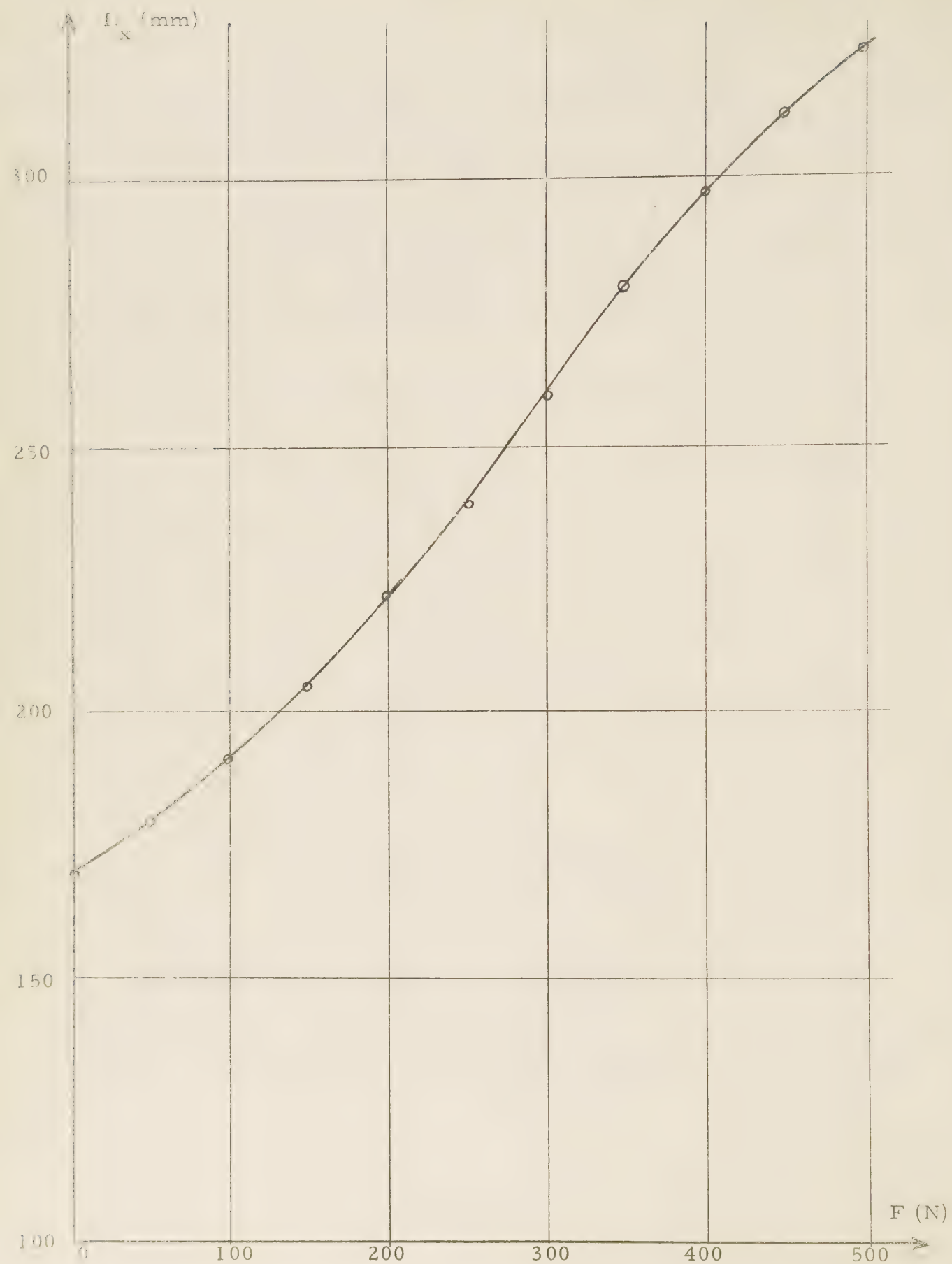
| F (N)                                    | 0    | 50    | 100  | 150  | 200  | 250  | 300  | 350  | 400  | 450  | 500  |
|------------------------------------------|------|-------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $L_y$ (mm)                               | 170  | 180   | 192  | 205  | 234  | 244  | 260  | 281  | 297  | 312  | 324  |
| $L_z$ (mm)                               | 107  | 103,5 | 98   | 96   | 93,5 | 91,5 | 89,5 | 88   | 86,5 | 85   | 84   |
| $L_z$ (mm)                               | 2,10 | 2,05  | 2,00 | 1,90 | 1,80 | 1,72 | 1,61 | 1,55 | 1,50 | 1,45 | 1,42 |
| $V$ (mm <sup>3</sup> x 10 <sup>4</sup> ) | 3,82 | 3,83  | 3,84 | 3,85 | 3,84 | 3,84 | 3,83 | 3,82 | 3,84 | 3,85 | 3,86 |

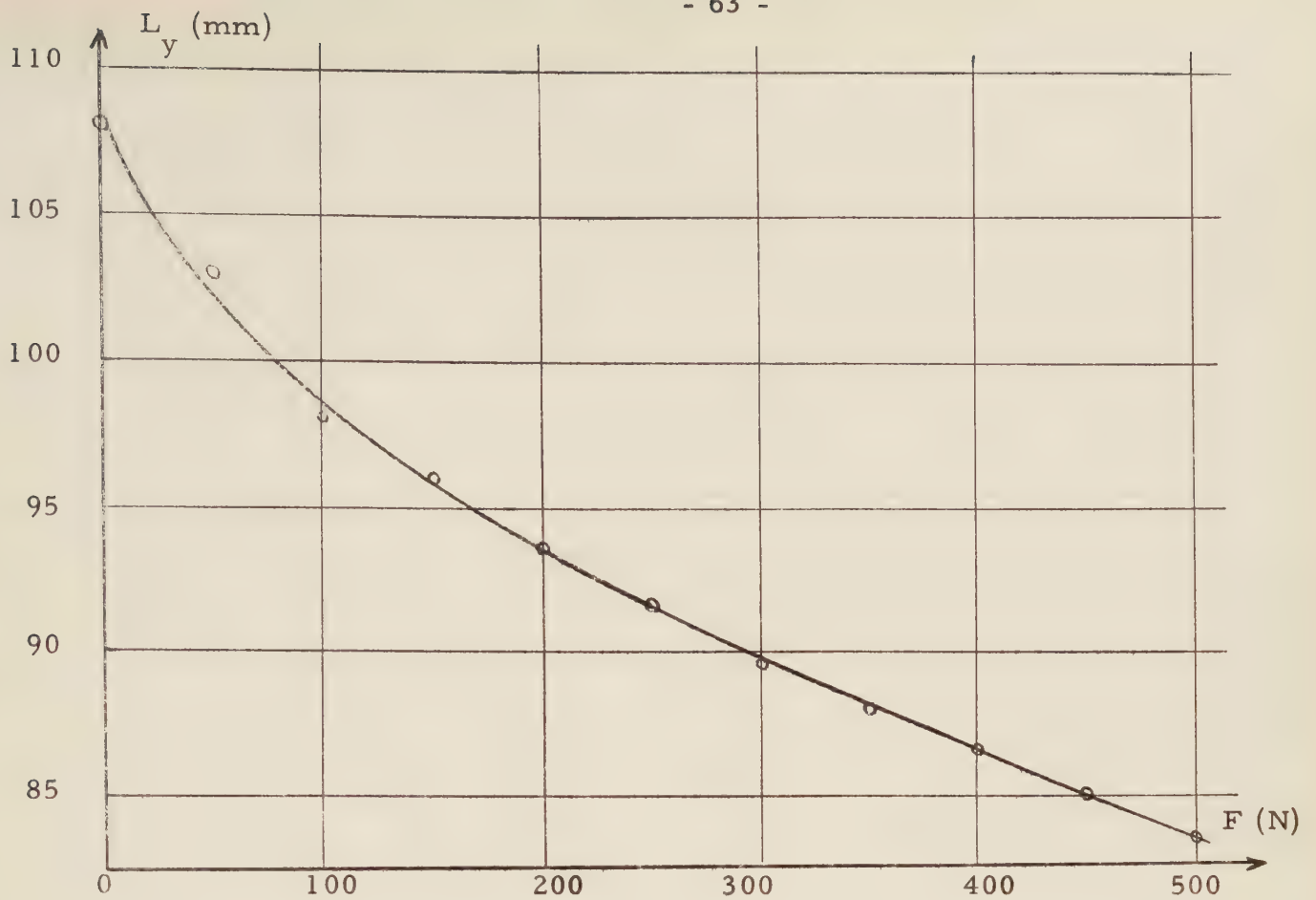
### 5-3 DETERMINATION DES MODULES D'YOUNG $E_S$ et $E_T$

#### 5-3-1 Module d'Young sécant $E_S$

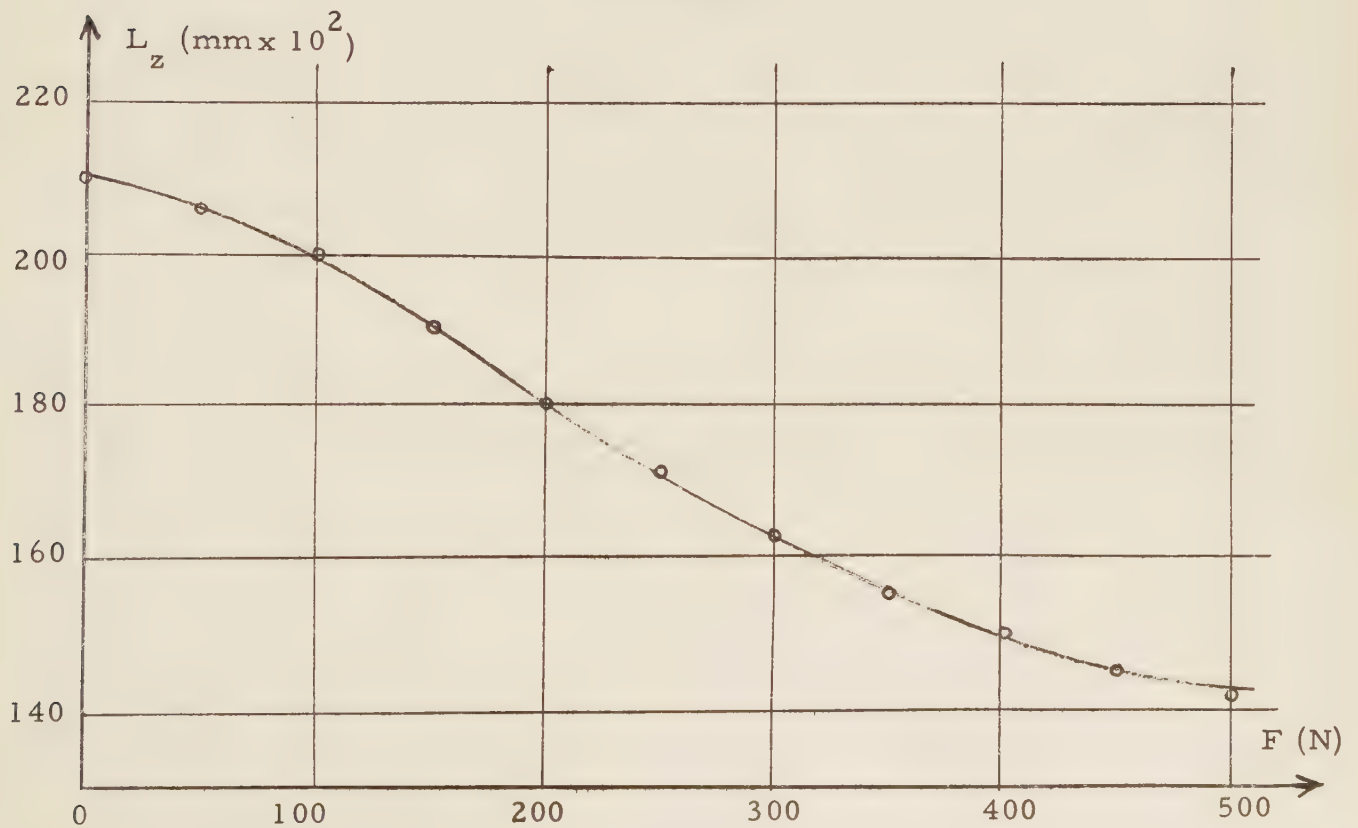
A partir de l'expérience décrite précédemment, nous effectuons des essais semblables à ceux décrits au chapitre IV. Les courbes

$\sigma_x = f(\epsilon_x)$  sont analogues à celles obtenues au graphe V, notamment en ce qui concerne la différence entre la courbe correspondant à la première traction (éprouvette vierge) et les suivantes. Le tableau ci-dessous est obtenu par dépouillement du diagramme correspondant à la 3<sup>e</sup> traction.

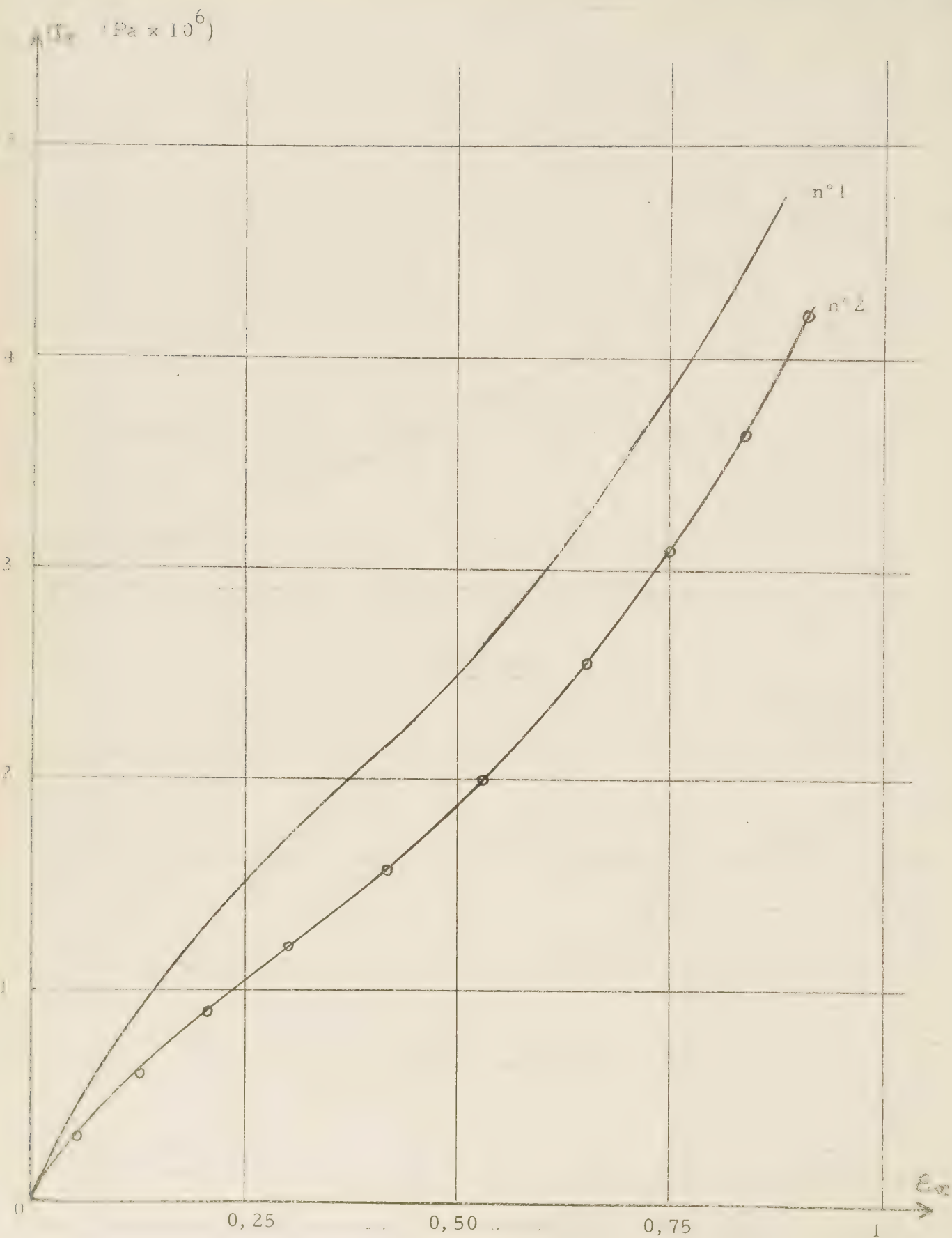




Graphe IX



Graphe X



Graphe XI

Tableau 8

| F (N)              | 0 | 50   | 100  | 150  | 200  | 250  | 300  | 350  | 400  | 450  | 500  |
|--------------------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\sigma_x$ (M. Pa) | 0 | 0,28 | 0,56 | 0,87 | 1,19 | 1,59 | 2,05 | 2,57 | 3,08 | 3,63 | 4,20 |
| $\epsilon_x$       | 0 | 0,06 | 0,13 | 0,21 | 0,31 | 0,42 | 0,53 | 0,65 | 0,75 | 0,84 | 0,91 |
| $E_S$ (M. Pa)      |   | 4,67 | 4,30 | 4,15 | 3,84 | 3,80 | 3,87 | 3,96 | 4,10 | 4,32 | 4,61 |

Par extrapolation, nous déterminons, à partir de la courbe n° du graphe XII, la valeur de  $E_S$  à l'origine. Nous constatons que les valeurs de  $E_S$  sont légèrement supérieures à celles obtenues pour la barre (variation maximum voisine de 10 %). Ceci s'explique par le fait que bien que ces caoutchoucs portent la même dénomination commerciale, celui constituant la barre n'a pas la même origine de fabrication que ceux utilisés ensuite (ici la plaque). Et nous concevons aisément qu'une légère variation de préparation puisse provoquer une modification sensible de la valeur de ses "constantes".

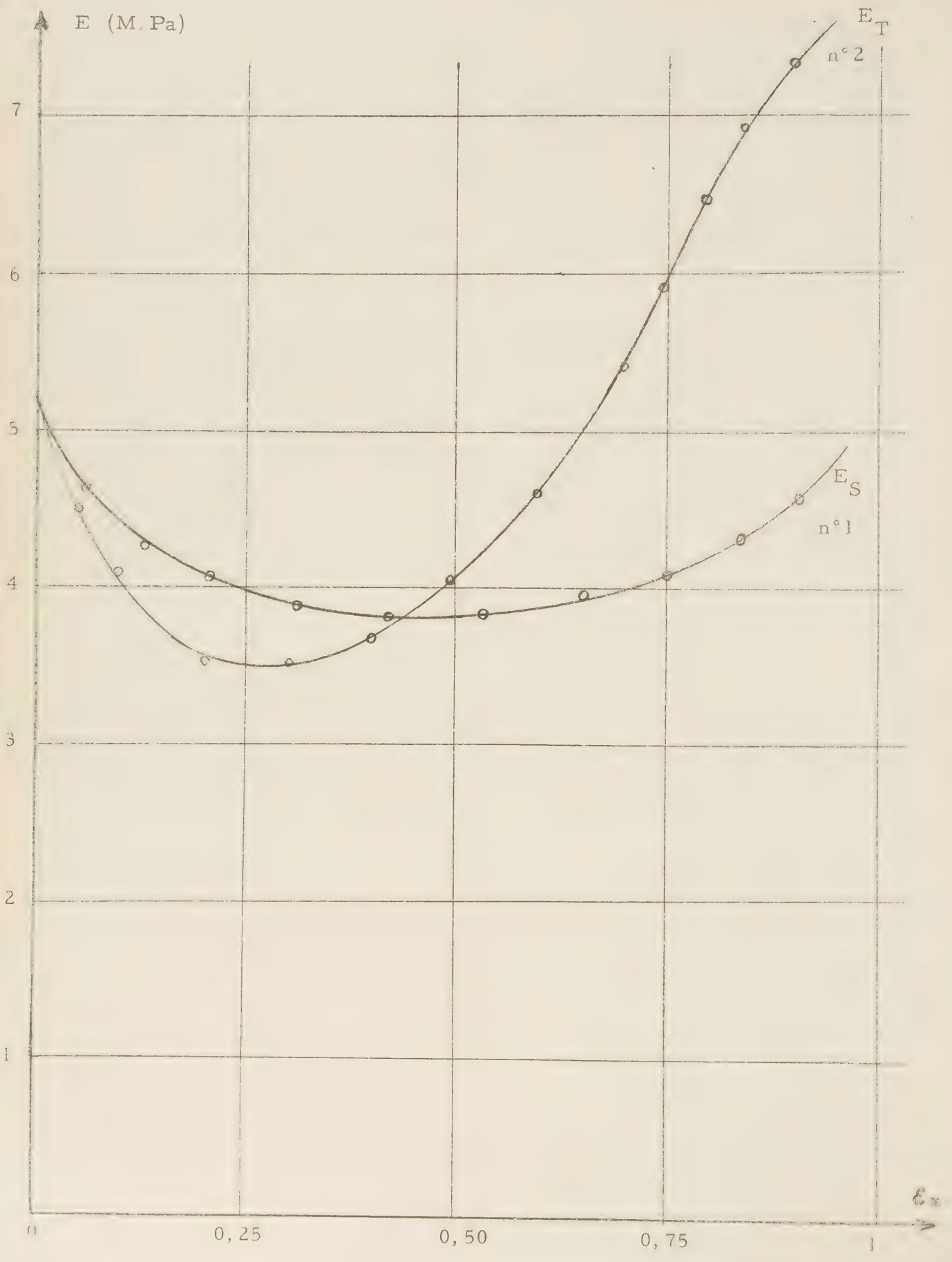
### 5-3-2 Module d'Young tangent $E_T$

Nous calculons  $E_T$  par la même méthode que précédemment, à savoir par dérivation approchée de la courbe  $\sigma_x = f(\epsilon_x)$ . Pour cela nous utilisons la courbe n° 2 du graphe XI ; c'est la courbe qui correspond à la 2<sup>ème</sup> traction de l'éprouvette, la courbe n° 1 étant celle obtenue lors de la première traction. Le tableau qui suit nous donne, après correction des valeurs extrêmes par intégration, les valeurs de  $E_T$ .

Tableau 9

|                           |      |      |      |      |      |      |      |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\sigma_x$ (M. Pa)        | 0    | 0,25 | 0,45 | 0,83 | 1,16 | 1,52 | 1,90 |
| $\epsilon_x$              | 0    | 0,05 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 |
| $\sigma'_x = E_T$ (M. Pa) | 5,60 | 4,52 | 4,15 | 3,50 | 3,45 | 3,70 | 4,00 |

|                           |      |      |      |      |      |      |  |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|--|
| $\sigma_x$ (M. Pa)        | 2,32 | 2,80 | 3,37 | 3,70 | 4,10 | 4,50 |  |
| $\epsilon_x$              | 0,60 | 0,70 | 0,80 | 0,85 | 0,90 | 0,95 |  |
| $\sigma'_x = E_T$ (M. Pa) | 4,50 | 5,25 | 6,50 | 7,00 | 7,30 |      |  |



Nous construisons au graphe XII la courbe  $\sigma_x \cdot L_T = f(\epsilon_x)$   
C'est la courbe n°2.

#### 5-4 DETERMINATION DES COEFFICIENTS DE POISSON $\nu_y$ et $\nu_z$

##### 5-4-1 Calculs de $\nu_y$ et $\nu_z$

Nous sommes conduits à introduire deux coefficients de Poisson, ainsi que nous l'avons signalé au 5-2, où nous avons constaté, d'après les courbes  $L_y = f(\sigma_x)$  et  $L_z = f(\sigma_x)$  que les variations de longueurs ci-dessus se faisaient suivant des lois différentes.

Pour chaque valeur de  $\sigma_x$ , les lectures de 2 OA, 2 OB d'une part, les mesures de  $L_z$  d'autre part, nous permettent de calculer  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$ .  $\sigma_x$  étant donné, nous déterminons les coefficients  $\nu_y$  et  $\nu_z$  à partir des relations :

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{1}{E_T} [\sigma_x - \nu_x (\sigma_y + \sigma_z)] \\ \epsilon_y = \frac{1}{E_T} [\sigma_y - \nu_y (\sigma_x + \sigma_z)] \\ \epsilon_z = \frac{1}{E_T} [\sigma_z - \nu_z (\sigma_x + \sigma_y)] \end{cases}$$

Ici  $\sigma_y = \sigma_z = 0$

Il en résulte

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\sigma_x}{E_T} \\ \epsilon_y = -\nu_y \frac{\sigma_x}{E_T} \\ \epsilon_z = -\nu_z \frac{\sigma_x}{E_T} \end{cases}$$

Ainsi, connaissant  $L_x$ ,  $L_y$ ,  $L_z$ , nous calculons les  $\epsilon_i$ .

Puis utilisant la relation  $E_T = f(\sigma_x)$ , nous déterminons  $\nu_y = f(\sigma_x)$

et  $\nu_z = f(\sigma_x)$  à partir des relations ci-dessus.

Il vient :

$$\begin{cases} \nu_y = -\epsilon_y \frac{E_T}{\sigma_x} \\ \nu_z = -\epsilon_z \frac{E_T}{\sigma_x} \end{cases}$$

Dans le tableau de calculs qui suit, nous utilisons ces valeurs pour construire les courbes  $\nu_y = f(\epsilon_x)$  et  $\nu_z = f(\epsilon_x)$

Les courbes n°1 et n°2 respectivement  $V_y = f(\epsilon_x)$  et  $V_z = g(\epsilon_x)$  nous montrent, que dans le cas où l'éprouvette admet une section rectangulaire de dimensions  $L_y$  et  $L_z$  non du même ordre de grandeur, leurs variations sont au cours du phénomène de traction, essentiellement différentes, notamment au voisinage de l'origine, c'est-à-dire pour de faibles allongements. En effet, alors que  $V_z$  décroît jusqu'à 0,2 (lecture par extrapolation)  $V_y$ , au contraire prend ses valeurs maximales, de l'ordre de 0,8. Pour  $\epsilon_x = 0,25$ ,  $V_y = V_z$ . Puis,  $V_z$  ne cesse de demeurer supérieur à  $V_y$ .

Ainsi, en début de traction c'est la largeur de la plaque  $L$  (plus grande dimension de la section) qui décroît, toutes choses égales d'ailleurs, le plus rapidement, mais aux grands allongements, c'est au tour de l'épaisseur  $L_z$ , et ceci jusqu'à  $\epsilon_x = 1$ , tout au moins. Car il faut noter que c'est surtout jusqu'à  $\epsilon_x = 0,50$ , ce qui correspond à  $\sigma_x \approx 2 \times 10^6$  Pa, que les deux courbes sont très différentes.

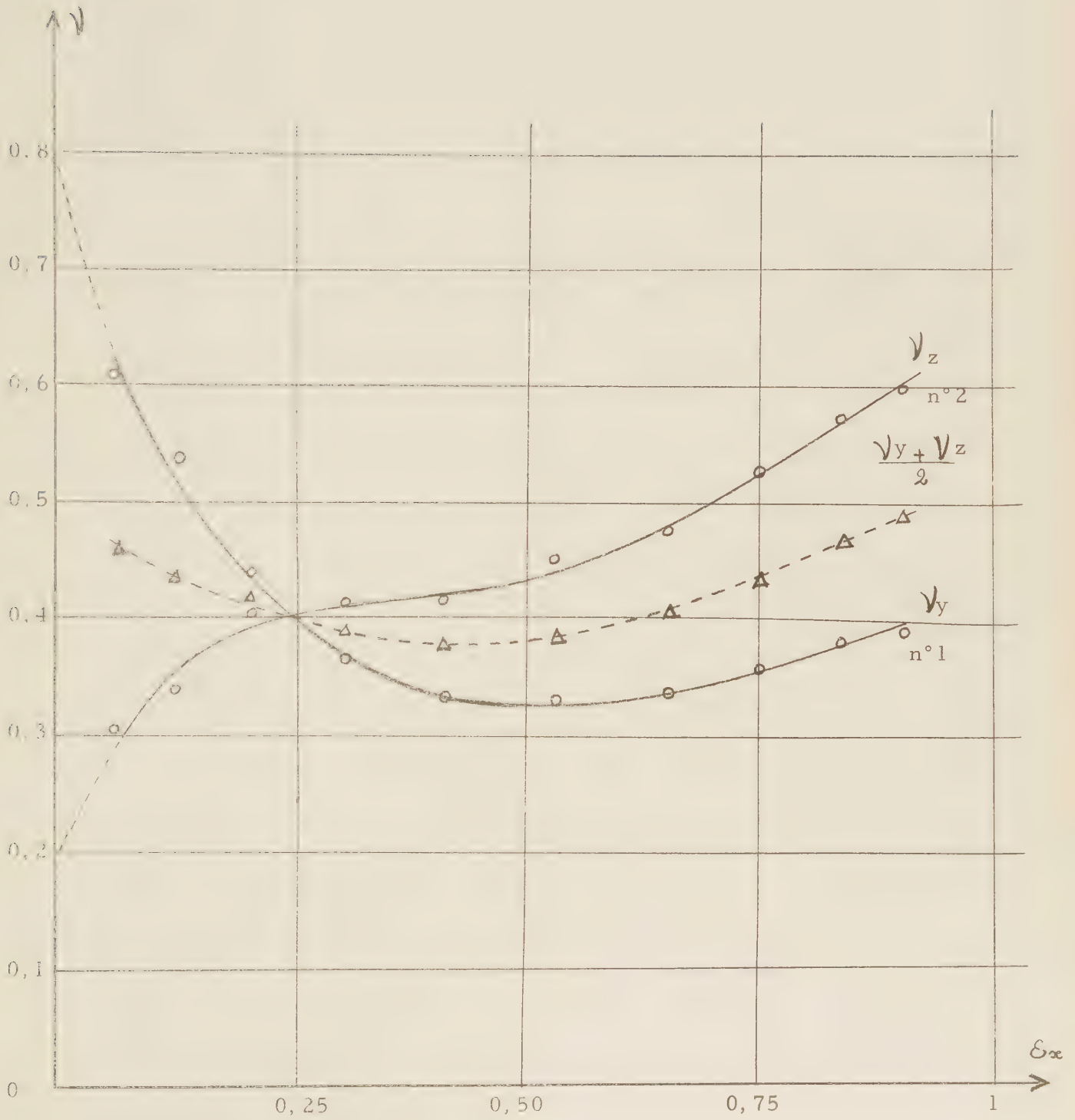
Nous avons également sur le même graphe construit la courbe  $\frac{V_y - V_z}{2} = h(\epsilon_x)$

Nous constatons que cette valeur moyenne, passe par un minimum pour des  $\epsilon_x$  voisins de 0,50.

Tableau 10

| $\epsilon_x$                            | 0 | 0,06  | 0,13  | 0,21  | 0,31  | 0,42  | 0,53  |
|-----------------------------------------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $V_y = \epsilon_y \frac{E_I}{\sigma_x}$ |   | 0,610 | 0,540 | 0,440 | 0,365 | 0,330 | 0,332 |
| $V_z = \epsilon_z \frac{E_I}{\sigma_x}$ |   | 0,306 | 0,340 | 0,395 | 0,414 | 0,415 | 0,453 |
| $\frac{V_y - V_z}{2}$                   |   | 0,152 | 0,100 | 0,023 | 0,076 | 0,058 | 0,060 |

|       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|
| 0,63  | 0,75  | 0,84  | 0,91  |
| 0,338 | 0,362 | 0,380 | 0,382 |
| 0,475 | 0,525 | 0,570 | 0,578 |
| 0,406 | 0,443 | 0,475 | 0,480 |



Graphe XIII

#### 5-4-2 Comparaisons de nos résultats avec la littérature.

J.P. BLATZ et WILLIAM (35) ont fait sur des caoutchoucs continus et des caoutchoucs mousses des expériences de tractions axiale et biaxiale portant sur des éprouvettes en forme de feuille, donc du genre de celles utilisées par nous dans le présent chapitre. Ces expériences étaient consécutives à une étude théorique dans laquelle ils ont considéré les énergies de déformation. Ils ont montré que dans le cas de caoutchoucs continus, ces fonctions ne dépendaient que de certains invariants relatifs aux tensions de déformation, et que, pour certains de ceux-ci, les énergies s'annulant, on retrouvait par approximation les lois de la résistance des matériaux classique.

Expérimentalement, dans le cas de ces caoutchoucs, le coefficient de Poisson trouvé était voisin de 0,45. Cette valeur correspond sensiblement à la moyenne  $\frac{\nu_y + \nu_z}{2}$  des deux coefficients que nous avons été conduits à introduire au cours de nos travaux.

#### 5-5 DETERMINATION DU MODELE DE RICOURT A LA TORSION G

##### 5-5-1 Calcul théorique du cisaillement.

Considérons l'éprouvette soumise à la traction, et plus particulièrement l'élément triangulaire OAB, que nous imaginons découpé dans la plaque. Le côté OB est soumis à la contrainte  $\sigma_x$ . Celle-ci donne naissance, à la contrainte  $\tau_x$  s'exerçant sur AB. Cette dernière se décompose suivant  $\sigma_n$ , contrainte normale, et  $\tau$  contrainte tangentielle ou de cisaillement. C'est elle qui est à l'origine des déformations angulaires, ou distorsions.

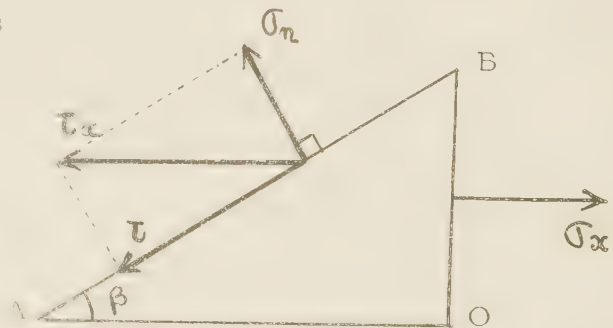


Figure 8

Ecrivons l'équation d'équilibre de cet élément. Il vient :

$$\sigma_x \cdot OB = \tau_x \cdot AB$$

$$\text{D'où, en fonction de } \beta, \quad \sigma_x = \frac{\tau}{\sin \beta \cdot \cos \beta}$$

$$\text{Finalement } \tau = \sigma_x \cdot \sin \beta \cos \beta = \frac{1}{2} \sigma_x \sin 2\beta$$

Mais par définition, la distorsion  $\gamma$  et l'angle  $\beta$  sont liés par la relation  $\gamma = \frac{\pi}{2} - 2\beta$  ou  $2\beta = \frac{\pi}{2} - \gamma$ . Substituant  $\gamma$  dans l'expression de  $\tau$ , nous obtenons la relation

$$\tau = \frac{1}{2} \sigma_x \cos \gamma, \text{ relation de la forme } \tau = f(\gamma).$$

Nous introduisons  $G$  tel que  $\tau = G \gamma$ .

$G$  est le module d'élasticité au cisaillement, ou module de glissement, ou encore module de rigidité.

#### 5-5-2. Résultats expérimentaux. Calcul de $G$

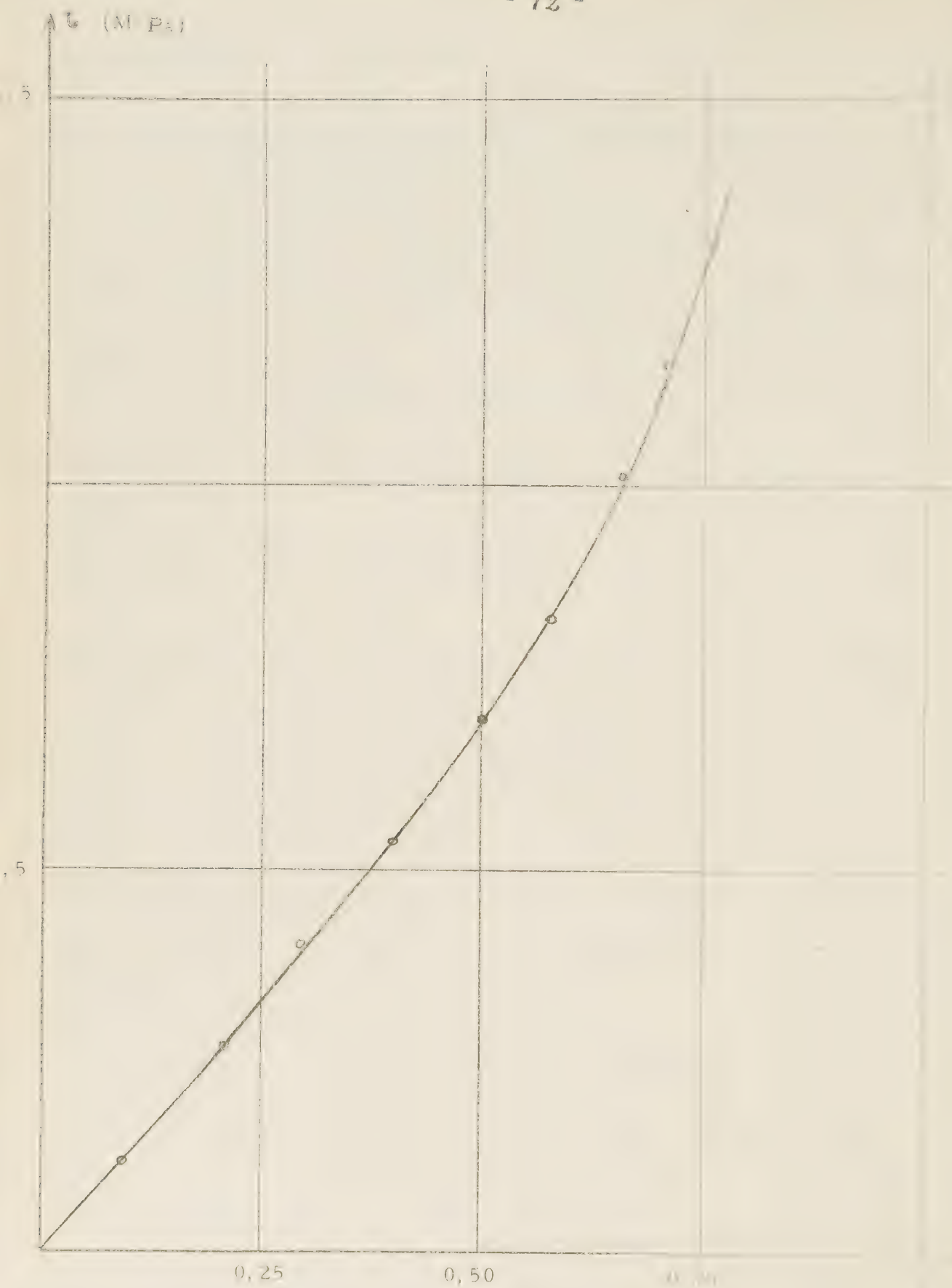
Pour  $\sigma_x$  donné, nous connaissons 2 OA et 2 OB. Le rapport  $\frac{OA}{OB} = \tan \beta$  nous permet, après substitution, de calculer  $\gamma$  et  $\tau$  grâce à la relation établie au 5-5-1.

Nous sommes ainsi conduits aux résultats du tableau qui suit. A partir d'eux, nous construisons les courbes  $\tau = f(\gamma)$  et  $G = f(\gamma)$ . Ce sont les graphes XIV et XV.

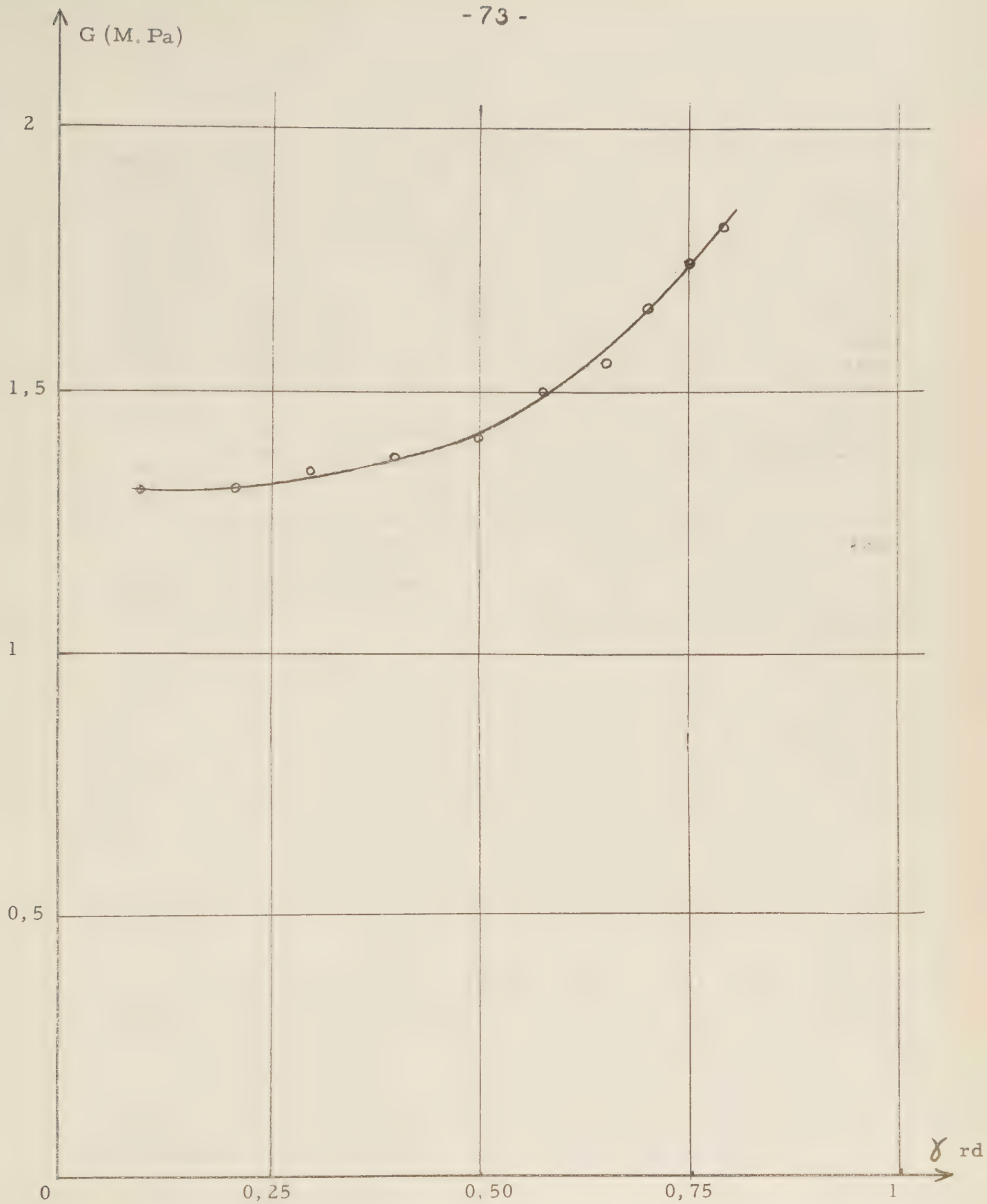
Tableau 11

|                           |        |        |        |        |        |        |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\sigma_x$ (M. Pa)        | 0      | 0,28   | 0,56   | 0,87   | 1,19   | 1,59   |
| 2 OA (mm)                 | 100    | 106    | 113    | 121    | 131,5  | 143,4  |
| 2 OB (mm)                 | 100    | 96,8   | 91,5   | 89,7   | 87,5   | 85,5   |
| $\beta$ (°)               | 45°    | 42°22' | 39°00' | 36°32' | 33°35' | 30°48' |
| $\frac{1}{2} \sin \gamma$ | 0,5000 | 0,498  | 0,489  | 0,478  | 0,461  | 0,440  |
| $\tau$ (M. Pa)            | 0      | 0,120  | 0,274  | 0,405  | 0,548  | 0,701  |
| $\gamma$ (rd)             | 0      | 0,092  | 0,209  | 0,296  | 0,399  | 0,496  |
| $G$ (M. Pa)               |        | 1,305  | 1,310  | 1,365  | 1,370  | 1,410  |

|                           |        |        |        |        |        |  |
|---------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--|
| $\sigma_x$ (M. Pa)        | 2,05   | 2,57   | 3,08   | 3,63   | 4,20   |  |
| 2 OA (mm)                 | 153    | 167    | 175    | 183,7  | 191    |  |
| 2 OB (mm)                 | 85,6   | 82,2   | 80,8   | 79,4   | 78,5   |  |
| $\beta$ (°)               | 28°41' | 25°15' | 24°48' | 23°22' | 22°21' |  |
| $\frac{1}{2} \sin \gamma$ | 0,421  | 0,396  | 0,381  | 0,364  | 0,351  |  |
| $\tau$ (M. Pa)            | 0,863  | 1,018  | 1,172  | 1,321  | 1,473  |  |
| $\gamma$ (rd)             | 0,570  | 0,655  | 0,705  | 0,755  | 0,791  |  |
| $G$ (M. Pa)               | 1,515  | 1,555  | 1,665  | 1,750  | 1,820  |  |



Grappe XIV



Graphe XV

### 5-5-3 Conclusion

A. R. PAYNE (36) a étudié la variation du module de cisaillement de caoutchouc en fonction de la contrainte introduite, et aussi de la constitution des caoutchoucs. Pour des vulcanisats non chargés au noir de carbone, on a trouvé que le module de cisaillement, en phase avec le cycle de mise en charge extrêmement lent (37) était pratiquement constant et ne variait pas avec la contrainte lorsque le cisaillement augmentait. La valeur de  $G$  s'accroît avec l'addition de charges de noirs de carbone, et la courbe  $G = f(\tau)$  ne serait plus rectiligne. Dans le cas de vulcanisats non chargés, c'est-à-dire pour des matériaux analogues à ceux sur lesquels nous avons travaillé ;  $G$  est voisin de  $10^6$  M. Pa ( $= 10^7$  dym/cm<sup>2</sup>). Cette valeur correspond à celles que nous avons établies, puisque  $G$  est compris entre 1,3 et 1,8 M. Pa.

Dans des études de distorsion statique, BLATZ et WILLIAM L. KO (38) ont trouvé également des valeurs correspondantes pour  $G$ , soit, dans le cas de caoutchoucs non chargés 34 PSI ou 2,3 M. Pa.

Ainsi  $G$ , dans le cas de vulcanisats non chargés, (ou très peu chargés) conserverait dans une zone très étendue de cisaillement une valeur sensiblement constante.

## CHAPITRE VI

---

### ETUDE DE LA TORSION

#### 9-1 PROCEDE EXPERIMENTAL

Les expériences du présent chapitre ont été effectuées sur une machine à torsion AMSLER . Celle-ci nous donne la relation entre l'angle de torsion  $\theta$  et le moment du couple de torsion appliqué aux extrémités de l'éprouvette. Le système d'enregistrement direct et de la lecture de  $M = f(\theta)$  est basé sur le principe du pendule d'inclinaison, auquel est associé un amortisseur hydraulique, et ayant effet exclusif sur le mouvement retour du pendule. Dans son ensemble le concept d'enregistrement est analogue à celui de la machine à traction AMSLER décrite au chapitre 5.

Les positions du pendule sont variables et à chacune d'elle correspond une sensibilité donnée. Nous avons travaillé sur l'unique sensibilité correspondant à l'intervalle  $0 < M(J) < 12$  soit, en système industriel, sensiblement  $0 < M(\text{kg.f}) < 1,2$ .

D'autre part, un système correcteur indique, pour  $\theta$  donné, l'angle  $\theta_0$  "absorbé" par le moment de l'appareil enregistreur. Aux grandes torsions cet angle est non négligeable, et nous en avons tenu compte au cours de nos essais.



Figure 9

Les expériences ont été faites sur des éprouvettes de section circulaire, de diamètre moyen  $D = 38,50 \text{ mm}$  et de longueur  $l = 250 \text{ mm}$ . En fait, la longueur dont nous avons tenu compte a été celle comprise entre les extrémités extérieures des mâchoires  $l_0 = 205 \text{ mm}$ . Cette méthode se justifie par le fait qu'aucune rotation mâchoire - éprouvette n'ayant lieu, les couples s'appliquent aux extrémités des dites mâchoires.

Nous avons, sur l'échantillon au repos tracé des génératrices rectilignes. Au cours des essais, nous pourrons, ainsi que le montre la figure 9, suivre la déformation de ces droites en hélices, ainsi que faire apparaître l'angle de distorsion  $\gamma$ .

## 6-2 ETUDE DE LA DEFORMATION D'UN RAYON

Le présent développement a pour but de déterminer comment se déforme le rayon d'une section, dans l'âme de l'éprouvette, au cours du phénomène de torsion, c'est-à-dire si, dans le plan de sa section (car nous savons que pour toute barre à section circulaire, il n'y a pas de gauchissement) un rayon se déforme suivant un autre rayon, donc subit une simple rotation ou au contraire si la torsion le transforme en une certaine courbe

A cette fin, nous avons effectué l'expérience suivante, schématisée par la figure 10. Nous avons soumis l'éprouvette à la torsion et l'avons percée dans un plan  $M$  normal à l'axe de torsion  $zz'$ , suivant un diamètre, et ce, de telle sorte que la trace demeure après avoir retiré l'aiguille. Puis nous avons déchargé la barre et l'avons sciée suivant le plan  $M$ , contenant la trace de la perforation.



Figure 10

Celle-ci, comme le montre la figure 11, est apparue rectiligne.

En perçant, nous avons matérialisé un diamètre sous torsion. Au repos, ce diamètre demeure une droite, donc un diamètre. Ceci implique, par raison inverse que, dans le phénomène de torsion, un rayon se déforme suivant un autre rayon, donc demeure rectiligne.

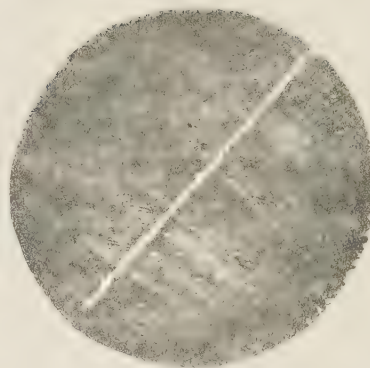


Figure 11

Ce résultat, intéressant en soi, nous sera nécessaire au cours de ce chapitre.

### 6-3 RESULTATS EXPERIMENTAUX

Nous soumettons l'éprouvette à la torsion et, pour un moment de torsion  $M$  donné, nous notons l'angle de torsion  $\theta$  et nous mesurons (au papier calque) la distorsion. Nous avons effectué ces mesures pour des moments allant jusqu'à 10 Joule, soit 1000 kgf mm, lesquels ont communiqué à la barre des rotations dépassant  $360^\circ$  et des distorsions voisines de  $45^\circ$ , c'est-à-dire de l'ordre de celles obtenues au chapitre précédent lors des essais de traction sur la plaque.

Le tableau qui suit résume les résultats obtenus.

Tableau 12

| M (J)             | 0 | 1   | 2   | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|-------------------|---|-----|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $\alpha = \theta$ | 0 | 46° | 86° | 129° | 175° | 216° | 260° | 306° | 360° | 417° | 446° |
| $\gamma$          | 0 | 4°  | 8°  | 12°  | 16°  | 20°  | 24°  | 28°  | 32°  | 36°  | 36°  |

A partir de ce dernier, nous construisons au graphe XVI la courbe  $\gamma = f(\theta)$  et au graphe XX, la courbe  $M = f(\theta)$ . Nous constatons que la variation angulaire de torsion est proportionnelle au moment  $M_i$ , la courbe (courbe n°1) étant une droite. Quant à la courbe  $\gamma = f(\theta)$ , elle nous montre que la relation est tout d'abord rigoureusement linéaire, pour des distorsions approchant 30°. Puis, comme la courbe  $M = f(\theta)$ , elle s'infléchit légèrement vers le bas.

#### 6-4 PRINCIPES DU CALCUL THEORIQUE DU MOMENT M

##### 6-4-1 Expression de M

La grandeur du moment M s'obtient en prenant une section transversale et en calculant le moment dû à l'effort tranchant

Soient  $(\sum \tau_i)_c$  les contraintes

de cisaillement entre  $r$  et

$r + dr$ , donc les efforts

s'exerçant sur la couronne

élémentaire.  $(\sum \tau_i)_c = \tau_i d\delta_i$

ou encore  $= \tau_i \times 2\pi r_i dr_i$

Soit  $M_i$  le moment par

rapport à l'axe  $\Delta$  du

cylindre, moment engen-

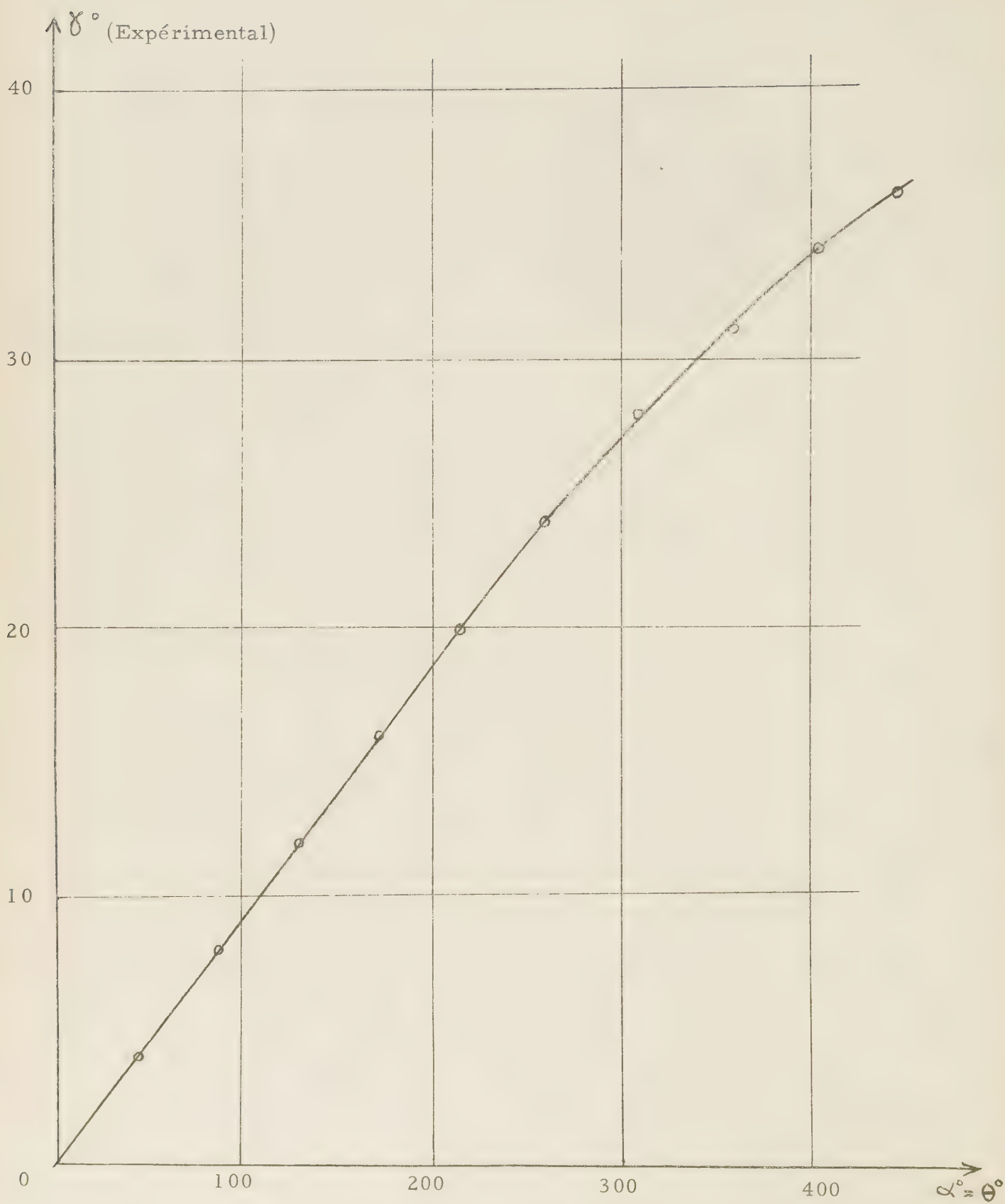
dré par les contraintes

sus-nommées.

$$M_i = \tau_i d\delta_i r_i = \tau_i \times 2\pi r_i^2 dr_i$$



Figure 12



Graphe XVI

Par intégration sur toute la section, il vient :

$$M = \sum M_i = \int_0^R M_i dr_i = \int_0^R 2 \pi r_i^2 \tau_i dr_i$$

où  $R$  est le rayon de la section

Connaissant  $\tau_i = f(r_i)$ , il est possible de faire l'intégration mathématique :

$$M = \int_0^R 2 \pi r^2 \tau(r) dr$$

Mais ici la relation  $\tau = f(r)$  est fournie expérimentalement, et de ce fait, nous ne possédons point d'équation liant ces deux variables. Aussi nous sommes conduits à faire une intégration approchée.

#### 6-4-2 Détermination de $\tau = f(r)$ . Diagramme des contraintes

Il est à présent nécessaire d'établir la relation entre  $\tau$  et  $r$ , ce qui revient à déterminer le diagramme des contraintes qui s'exercent sur le rayon  $R$  d'une section.

Considérons la barre circulaire soumise à la torsion et coupons-la suivant un plan  $\Pi$  normal à l'axe  $\Delta$  du cylindre.

La torsion conservant, ainsi que nous l'avons montré dans l'expérience du 6-2, la linéarité de tout rayon, nous avons la figure ci-contre.

L'angle de torsion est  $\theta$   
l'angle de distorsion formé par la génératrice dans l'état de repos  $\omega B$  et la direction  $\omega A$  parallèle à l'axe  $\Delta$  du cylindre est  $\gamma$ .

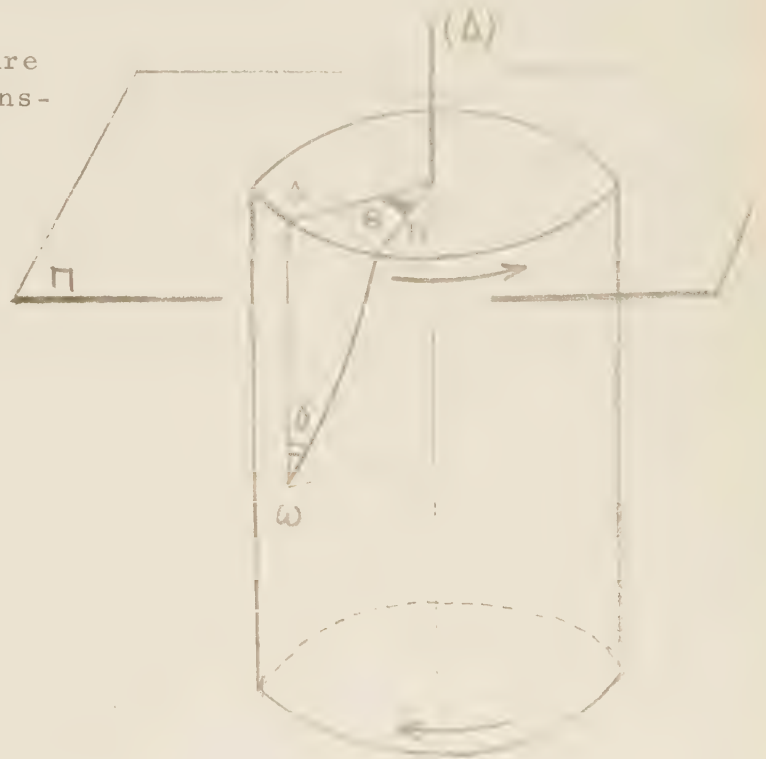


Figure 13

Des considérations élémentaires nous conduisent à la relation  $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\overline{AB}}{\omega A} = \frac{r}{\omega A} \cdot \theta = \theta_1$ ,  
avec  $\theta_1 = \frac{\theta}{A\omega}$  = angle unitaire de torsion)

Mais utilisant la relation  $\tau = G \gamma$ , la connaissance de  $\gamma$  nous permet de calculer  $\tau$ , et par là même de résoudre le problème.

Pour M donné, donc pour  $\theta_1$  donné, nous déterminons  $\operatorname{tg} \gamma_i = \theta_1 \lambda_i$ , puis  $\gamma_i$ , puis  $\tau_i$ , en utilisant la courbe  $\tau = f(\gamma)$  établie au chapitre précédent (graphe XIV).

En résumé, nous ferons, pour M donné, le tableau des calculs ci-dessous, dans lequel, à partir des variations de r, nous calculons les valeurs correspondantes des autres quantités.

| r     | $\operatorname{tg} \gamma$   | $\gamma$   | $\tau$   | $M_i = 2 \pi r^2 \tau$ |
|-------|------------------------------|------------|----------|------------------------|
| 0     | 0                            | 0          | ...      | ...                    |
| ...   | ...                          | ...        | ...      | ...                    |
| $r_i$ | $\operatorname{tg} \gamma_i$ | $\gamma_i$ | $\tau_i$ | $M_i$                  |
| ...   | ...                          | ...        | ...      | ...                    |
| R     | $\operatorname{tg} \gamma_m$ | $\gamma_m$ | ...      | ...                    |

Puis nous construisons les courbes  $\tau = f(r)$  et  $M = \tau \cdot 2\pi r^2 = f(r)$ . Celles-ci déterminent comme le montrent les figures 14-a et 14-b le diagramme des contraintes de cisaillement et le diagramme des moments dus à celles-ci le long d'un rayon R.

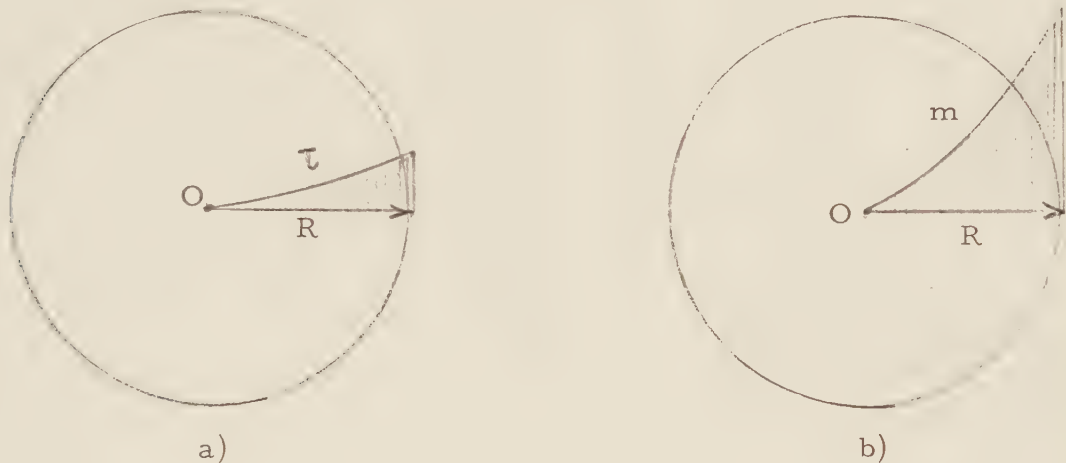


Figure 14

## 6-5 CALCUL THEORIQUE DU MOMENT M

### 6-5-1 Exemple de résolution pour $\Theta = 260^\circ$

Nous calculons le moment théorique M dans le cas d'un angle de torsion  $\Theta = 260^\circ = 4,54 \text{ rd}$ . La connaissance de  $\Theta$ , nous permet, pour chaque r de calculer  $\gamma$  à partir de  $\text{tg } \gamma = \frac{r}{A\omega} \Theta$ , puis  $\tau$

grâce au graphe XIV  $\tau = f(\gamma)$ . Et de la sorte, nous formons le tableau ci-dessous, dont le schéma a été donné au paragraphe précédent, et qui conduit aux valeurs de  $\tau(r)$  et  $\tau(r) 2\pi r^2$

Tableau 13

| r (mm) | $\operatorname{tg} \gamma = \frac{r}{A \omega} \theta$ | $\gamma$         | $\tau$ (M. Pa) | $2 \pi r^2$        | $2 \pi r^2 \tau$ |
|--------|--------------------------------------------------------|------------------|----------------|--------------------|------------------|
| 0      | 0                                                      | 0                | 0              | $0 \times 10^{-4}$ | 0                |
| 4      | 0,0885                                                 | $5^{\circ} 04'$  | 0,11           | 1,005              | 11               |
| 8      | 0,177                                                  | $10^{\circ} 02'$ | 0,23           | 4,01               | 92               |
| 12     | 0,265                                                  | $14^{\circ} 51'$ | 0,33           | 9,04               | 298              |
| 16     | 0,354                                                  | $19^{\circ} 30'$ | 0,45           | 16,01              | 721              |
| 20     | 0,442                                                  | $23^{\circ} 51'$ | 0,57           | 25,10              | 1430             |

Notons que nous trouvons un  $\gamma_M$  voisin de  $24^{\circ}$ . Expérimentalement, nous avons mesuré  $\gamma_M = 25^{\circ}$ .

A partir de ces résultats, nous construisons au graphe XVII, le diagramme  $\tau = f(r)$ . Nous constatons que  $\tau$  est fonction linéaire de  $r$ .

Puis la construction de  $\tau \cdot 2 \pi r^2 = f(r)$  nous donne le diagramme des moments de cisaillement (graphe XVIII). Il ne reste plus qu'à faire l'intégration de ce diagramme pour obtenir le moment résultant.

### Intégration

Nous avons annoncé, au paragraphe ci-dessus une intégration approchée. Mais le fait que  $\tau$  soit une fonction linéaire de  $r$ , nous permet d'écrire  $\tau$  sous la forme  $\tau = k \cdot r$ , de déterminer  $k$  et de faire une intégration mathématique.

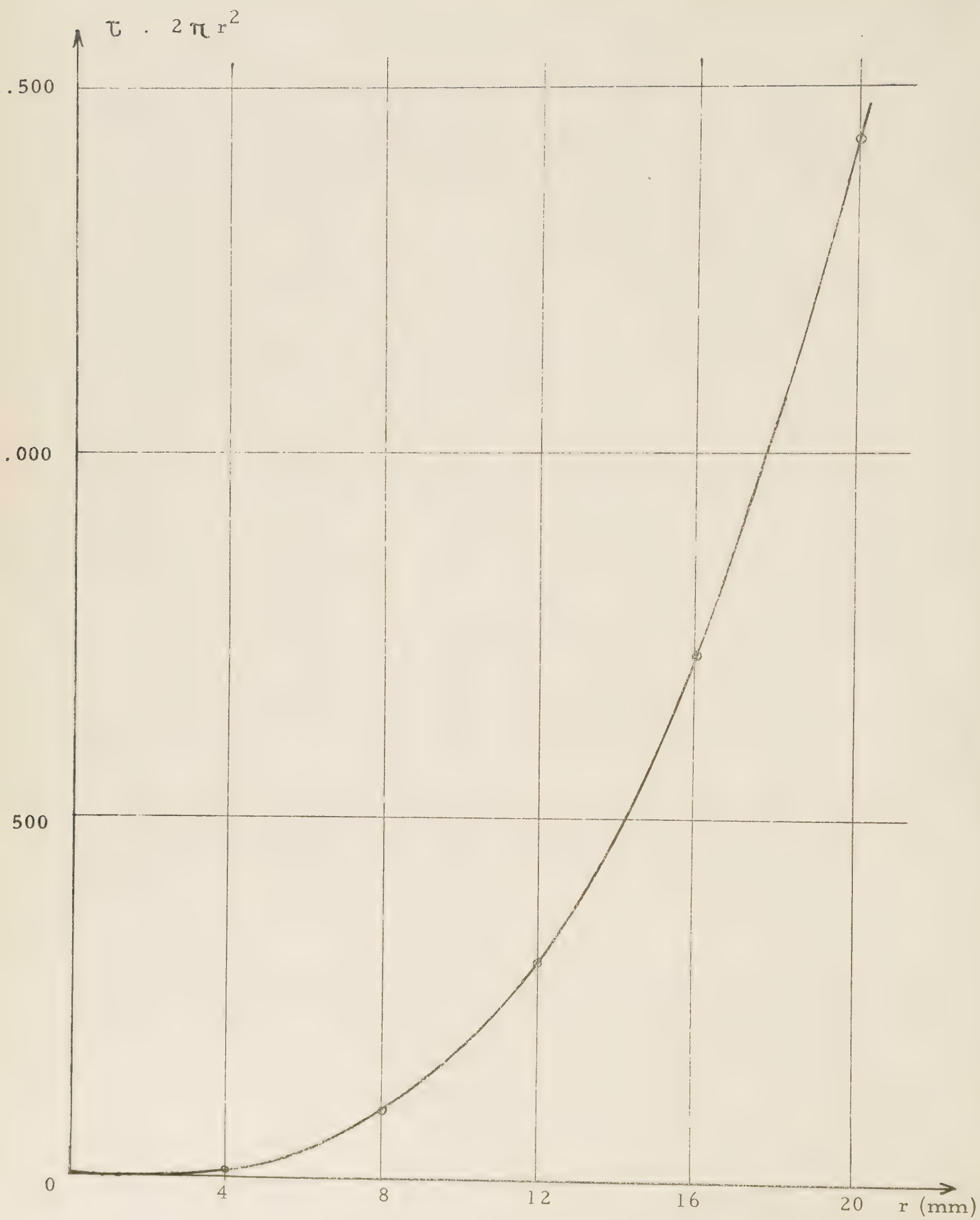
Du graphe XVII, nous tirons :

$$0,57 \times 10^6 = k \cdot 20 \times 10^{-3}$$

$$k = \frac{5,7}{2} 10^7 \quad . \text{ Donc } \tau = \frac{5,70}{2} \times 10^7 r$$



Graphe XVII



Graphe XVIII

$$\text{D'où } M_t = \int_0^R \frac{5,70}{2} \times 10^7 r \times 2 \pi r^2 dr$$

$$\text{avec } R = 19,25 \times 10^{-3}$$

$$\begin{aligned} M_t &= 5,70 \times 10^7 \times \pi \int_0^R r^3 dr \\ &= 5,70 \times 10^7 \times \pi \times \frac{(19,25 \times 10^{-3})^4}{4} \end{aligned}$$

$$\text{Finalement } M_t = 6,18 \text{ Joule.}$$

Or pour  $\theta = 260^\circ$ , le moment enregistré expérimentalement était  $M_e = 6 \text{ J}$ .

Ainsi la vérification est excellente puisque la variation entre les deux résultats est de 3 %.

#### 6-5-2 Résultats définitifs. Valeurs de $M_t$

Nous procédons de même pour calculer le moment de torsion théorique, correspondant aux angles de torsion  $\theta$  suivants :

$$\theta = 86^\circ ; 173^\circ ; 360^\circ ; 446^\circ.$$

Nous choisissons ces valeurs car pour elles nous connaissons expérimentalement  $\gamma$ , distorsion au bord de la barre. Comme nous pouvons la calculer par ailleurs, cela nous permet de comparer la précision de la mesure angulaire  $\gamma$ . Dans le tableau qui suit nous faisons apparaître les valeurs calculées (indice t) en correspondance avec celles obtenues expérimentalement (indice e).

Tableau n° 14

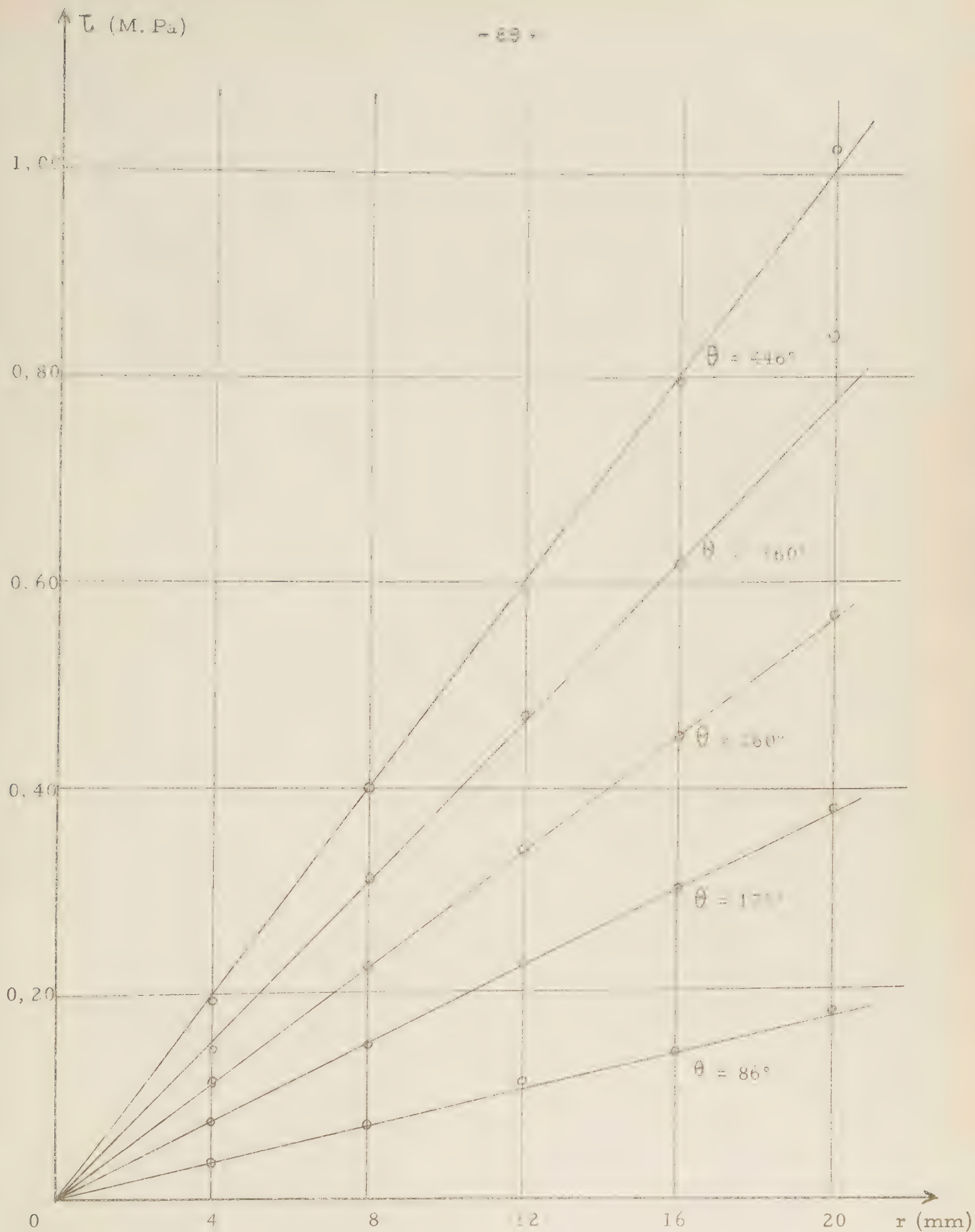
|            |    |     |       |      |        |      |        |      |        |      |        |
|------------|----|-----|-------|------|--------|------|--------|------|--------|------|--------|
| $\theta$   | 0° | 46° | 86°   | 129° | 173°   | 216° | 260°   | 308° | 360°   | 403° | 446°   |
| $\gamma_e$ | 0° |     | 8°    |      | 16°    |      | 24°    |      | 31°    |      | 36°    |
| $\gamma_t$ | 0° |     | 8°17' |      | 16°23' |      | 23°51' |      | 31°28' |      | 37°12' |
| $M_e(J)$   | 0  |     | 2     |      | 4      |      | 6      |      | 8      |      | 10     |
| $M_t(J)$   | 0  |     | 2,01  |      | 4,12   |      | 6,18   |      | 8,45   |      | 10,8   |

Nous avons résumé au graphe XIX, les résultats intermédiaires par les courbes  $\mathcal{L} = f(r)$  pour les différents angles  $\theta$  considérés. Nous constatons que ces courbes sont toutes rectilignes, ce qui confirme la théorie ainsi que notre résultat expérimental du paragraphe précédent.

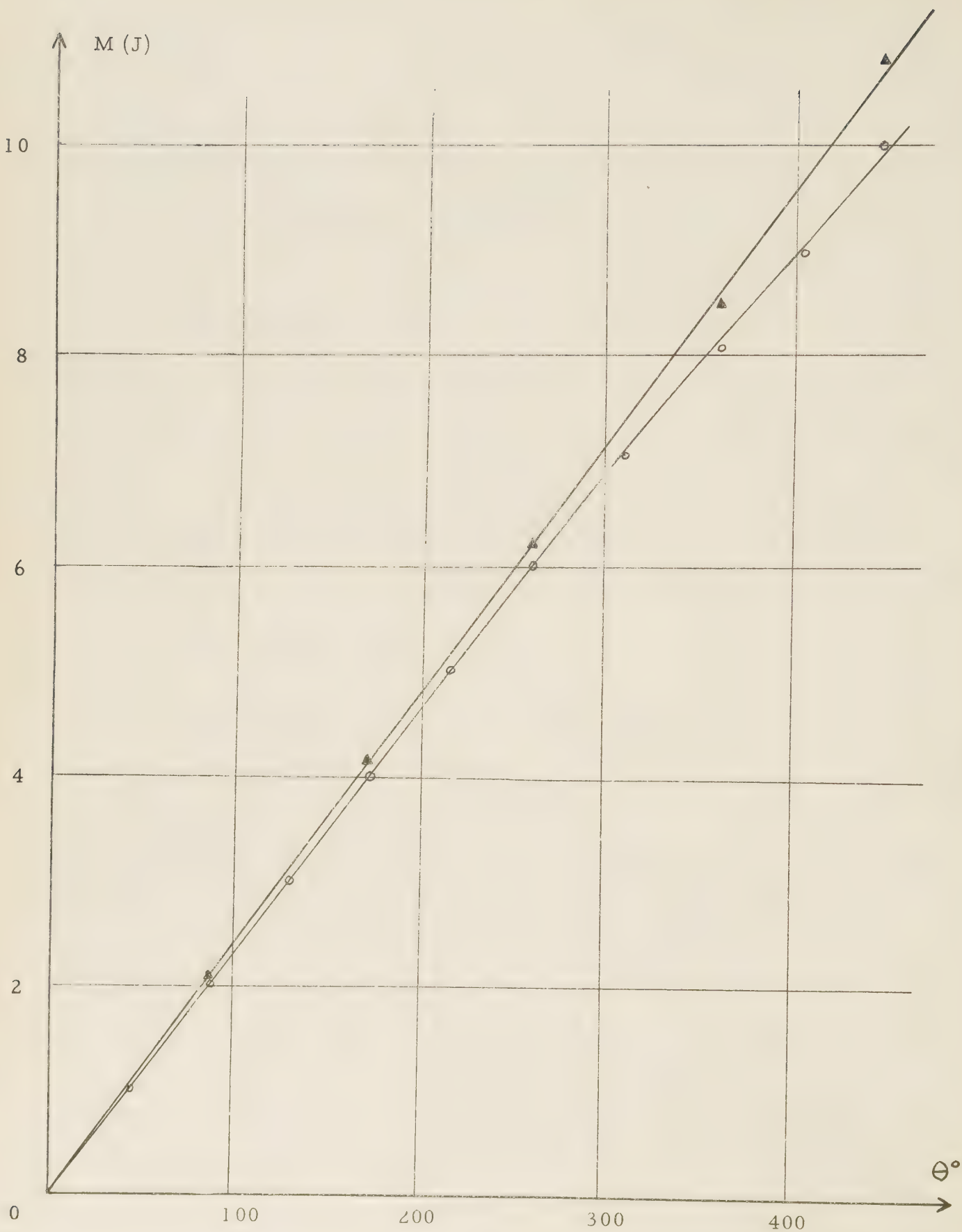
#### 6-5-3 Comparaison de $M_t$ et $M_e$

Le tableau de résultats numériques étant établi, nous construisons au graphe XX, les deux courbes  $M_t = f(\theta)$  et  $M_e = f(\theta)$ . Les deux courbes sont très voisines l'une de l'autre. La relation  $M_t = f(\theta)$  se traduit par une droite, alors que la courbe  $M_e = f(\theta)$  s'en écarte par valeurs inférieures, notamment à partir de  $\theta > 200^\circ$ . Il est possible que pour des angles de torsion relativement élevés, il se produise un très léger glissement de la barre dans les mâchoires de fixation. Nous n'avons pu mettre en évidence de tels éventuelles rotations barre - mâchoire, au cours de nos expériences, étant donné que les droites génératrices du cylindre se déforment suivant des hélices, et ceci depuis le bord extérieur de la mâchoire.

Nous attachons une grande importance à ces derniers résultats. Le fait que  $M_e$  et  $M_t$  coïncident avec une erreur moyenne inférieure à 5 % montre que notre processus de détermination théorique et expérimentale des constantes conduit à des résultats qui corroborent parfaitement les phénomènes effectifs de la torsion.



Graphe XIX



Grappe XX

La littérature ne nous a pas permis de comparer les expériences au présent chapitre, pas plus que les développements numériques qui les ont suivies. Nous n'avons point en effet trouvé d'article étudiant le phénomène de torsion suivant ce processus. Néanmoins, le fait que la corrélation entre les 2 moments  $M_e$  et  $M_t$  soit excellente tend à prouver que tout le développement précédent était parfaitement justifiable de la théorie de la résistance des matériaux classique, avec les corrections que nous lui avons apportée.



## CHAPITRE VII

### TORSION DE BARRES A SECTION RECTANGULAIRE

#### ETUDE DU GAUCHISSEMENT

##### 7-1 INTRODUCTION

Nous savons que le phénomène de torsion produit sur des barres prismatiques à section non circulaire un gauchissement déterminé au 2-1-3 , par l'équation 13). De ce gauchissement résulte le fait que toute section transversale initialement plane se déforme au cours de la mise en charge en une section gauche dont chaque élément de matière se déduit de sa position initiale par la rotation d'un certain angle, associée à une translation suivant la direction de l'axe de rotation. Cette variation de cote,  $\Delta w$  , est donnée par l'équation. Nous nous proposons d'étudier la déformation des sections de barres prismatiques rectangulaires de dimensions : 120 x 8 x 2 cm, à partir de la détermination des lignes de niveau d'une telle surface gauchée. En fait, pour étudier une telle déformation, il conviendrait de considérer une section travaillant à la torsion, située dans l'âme de la barre, entre les deux couples antagonistes. Cela n'est pas évidemment possible, et nous sommes conduits à considérer une des sections extrêmes. Cette extrémité se trouve en dehors du couple appliqué mais suffisamment près de l'un de ceux-ci pour que, qualitativement au moins, le gauchissement subsiste encore. Nous avons été amenés à placer le collier à des distances variant de 1 à 2 cm de la section extrême.

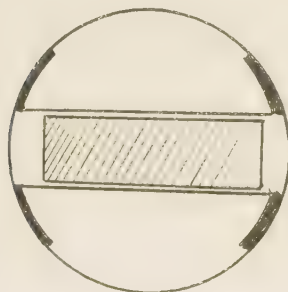
De la sorte, le gauchissement existe encore et les tensions complémentaires introduites au contact du collier sont déjà évanouies, et ne viennent pas, en première approximation perturber le phénomène.

Notre première idée qui consistait à étudier directement la surface déformée, grâce à un comparateur placé sur le marbre solidaire du châssis s'est avérée peu précise, la raison principale provenant de ce que la pointe s'enfonçait dans le caoutchouc. Cette difficulté a été résolue en travaillant non sur la barre elle-même, mais sur un moule de la section gauchie. Le processus d'obtention de ce dernier est fort simple. L'échantillon est soumis à la torsion et nous faisons un moule au plâtre de la section supérieure, considérée dans les conditions indiquées plus haut.

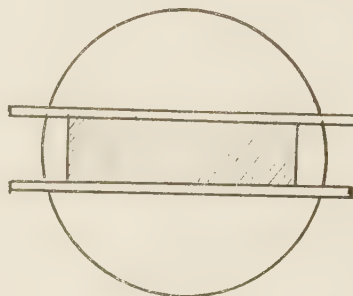
Etant donné que les barres ont des sections rectangulaires admettant 2 axes de symétrie, il en résulte que la section gauchie admet un centre de symétrie. Ainsi le moule n'est plus seulement "négatif", mais représente bien la déformation de l'échantillon, à une rotation de  $180^\circ$  près.

## 7-2 DESCRIPTION DE L'APPAREIL DE TORSION

La barre est soumise à un couple qui fait tourner ses extrémités de  $360^\circ$ . Ce couple s'exerce de la façon suivante : l'échantillon barre est fixée en sa partie inférieure par un collier métallique indéformable ayant les dimensions de la barre. Celui-ci est solidaire du socle fixé au bâti. En fait, ainsi que le montre la figure 15-a, la barre peut glisser à l'intérieur du collier, ce qui permet de diminuer les contraintes longitudinales parasites, introduites lorsque l'on tord la barre.



a)



b)

Figure 15

A la partie supérieure, la barre, une fois tournée de l'angle voulu, est maintenue en place, grâce à deux tiges métalliques cylindriques qui traversent le socle (figure 15-b). Les deux points d'application sont distants de 1 mètre. L'application matérielle du couple se fait de telle sorte que les contraintes transversales soient nulles. En effet, la barre engrenant sur les tiges et celles-ci étant reliées au socle par une articulation de verrou, tout déplacement transversal est possible à l'échantillon. De la sorte, la barre est soumise à la torsion dans des conditions pratiques qui font que les efforts parasites sont minimales.

Les figures 16-a et 16-b représentent respectivement la barre au repos et la barre en torsion. Le quadrillage que nous avons tracé, met en évidence le cisaillement résultant aux bords, ainsi que le gauchissement d'une quelconque section transversale.

La figure 17 représente la déformation de l'extrémité supérieure de la barre. C'est d'une telle configuration que nous exécutons le moulage indiqué. La constitution de ce moule est extrêmement simple. Nous entourons l'extrémité de l'échantillon d'un ruban adhésif souple, épousant parfaitement le contour, et servant de "coffrage". Il suffit de placer le plâtre et de laisser solidifier celui-ci. Pour le démoulage, il suffit de retirer le ruban placé en début de manipulation. Afin que le moule ainsi formé se décolle parfaitement de la surface caoutchoutique, nous enduison celle-ci, avant dépôt du plâtre, d'une légère couche d'huile fine.

### 7-3 DEPOUILLEMENT AU COMPAREUR DES ECHANTILLONS MOULES

#### 7-3-1 Diagramme des lignes de niveau

L'échantillon, après avoir été quadrillé est placé sur un marbre grâce à une pâte à modeler dont la malléabilité permet de déterminer le plan de référence de la surface à partir des propriétés déjà énoncées (la cote des deux axes du rectangle est nulle ; étant donné que par ailleurs ils ne subissent aucun déplacement vertical, ils définissent le plan de référence, coté zéro). Nous lisons ainsi la cote de tout noeud du maillage avec la précision du centième de mm.

Le diagramme de la figure 18 montre l'allure des courbes de niveau, correspondant à des  $\Delta w = - 0,25$  mm. Nous faisons figurer aux points nodaux la cote correspondante lue au comparateur.



a



b

Figure 16



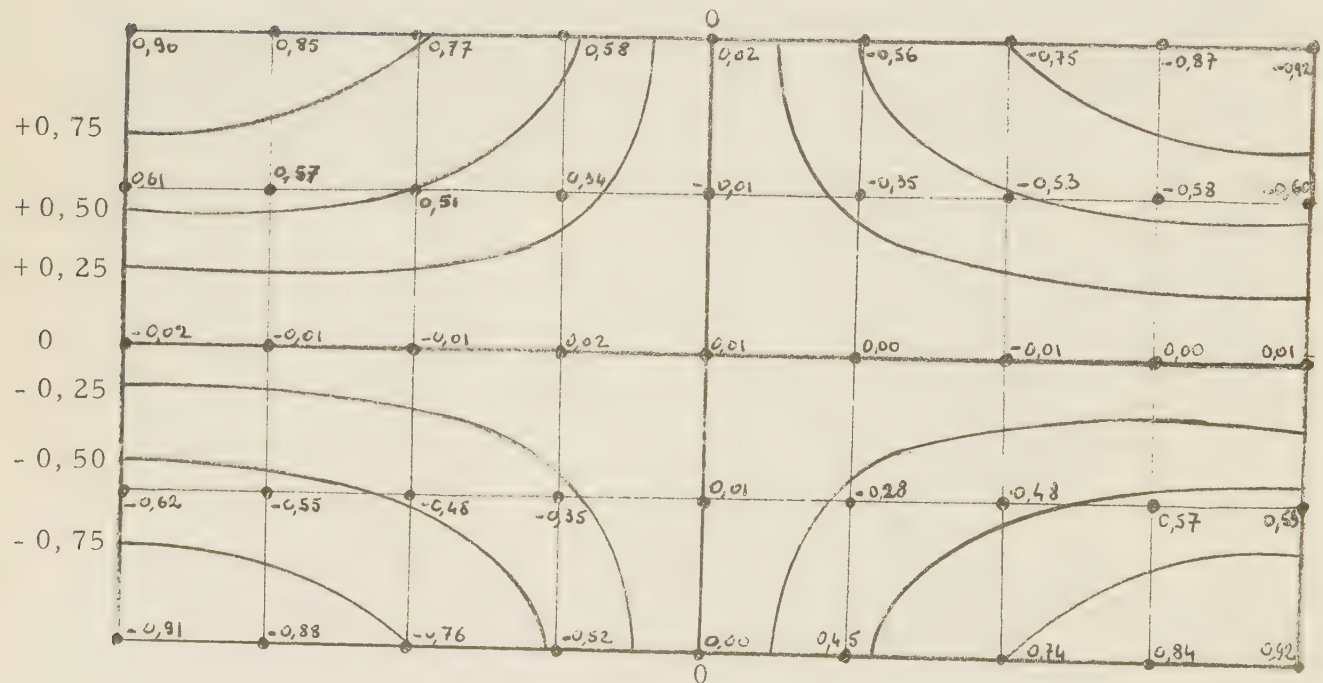
Figure 17

Chacune de ces valeurs est la moyenne de 3 lectures.  
En fait, la précision de la méthode est excellente, l'écart moyen étant de l'ordre du  $\frac{1}{100}$  de mm, ce qui, compte tenu de l'ordre de grandeur du gauchissement,  $-(\Delta w)$  maximum est voisin de 1 mm — correspond à une erreur inférieure à 1 %.

Nous constatons que l'expérience corrobore parfaitement les résultats indiqués par la théorie. En particulier, les axes de la section rectangulaire ne subissent aucun gauchissement.

D'autre part, la symétrie centrale est très bien vérifiée.

Figure 18



### 7-3-2 Inconvénients de cette méthode

Cette façon de dépouiller l'échantillon présente certains inconvénients. Le plus notoire est le temps relativement grand nécessaire à la détermination des cotes des points nodaux. D'autre part, la construction des courbes de niveau est également assez longue ; si l'on veut que celles-ci soient précises, il est nécessaire de faire de nombreuses interpolations afin de donner une valeur aux intersections d'une ligne cotée avec un fil du maillage.

Disons enfin que si l'échantillon se déplace au cours de manipulation, et quitte par là-même son plan de référence, la perturbation n'étant pas forcément visible, on risque de lire des résultats erronés. Pour diminuer ce risque, nous avons lu successivement les cotes des points symétriques. La cote de ces 2 points devant être la même, cela montrait que l'échantillon n'avait pas bougé dans une direction au moins. Il était néanmoins prudent de vérifier la position des axes de référence.

## 7-4 DEPOUILLEMENT PAR METHODE OPTIQUE

### 7-4-1 Principe de la méthode

Nous avons imaginé, pour déterminer les lignes de niveau, une expérience basée sur le principe optique suivant : considérons figure 19-a une source lumineuse L, génératrice par l'intermédiaire d'une fente F d'un faisceau lumineux parallèle, de largeur  $l$ , et d'épaisseur  $e$ , intercepté par l'échantillon de la section gauchie S. Si l'échantillon est placé sur un support de telle sorte que son plan de référence défini par ses 2 axes de symétrie, soit parallèle au plan horizontal inférieur du faisceau lumineux, celui-ci déterminera sur l'échantillon deux zones : l'une éclairée, l'autre non éclairée, et la limite des deux domaines définie par la partie inférieure du faisceau lumineux sera une ligne de niveau.

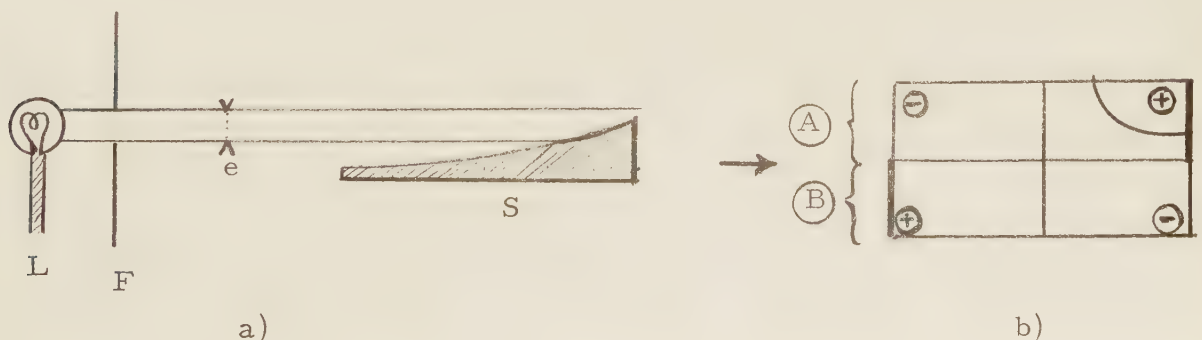


Figure 19

Si l'échantillon est placé comme l'indique la figure 19-b, c'est-à-dire de façon que son grand axe soit parallèle à la direction du faisceau, les parties non éclairées devront cette situation à deux raisons, suivant qu'il s'agira de la partie (A) ou de la partie (B). La portion de (A) non éclairée sera, de par ce que nous avons dit, la portion de la surface située au-dessous de la ligne de niveau  $\Delta w = Cte$  définie par le faisceau. Quant à la partie (B), elle ne sera nullement éclairée parce que son bord gauche étant un bord à cote  $\Delta w$  maximum, interceptera tout le faisceau.

Il s'ensuit qu'un tel montage permettrait seulement, par variation de cote, de support, donc de l'échantillon, de faire apparaître les lignes de la seule partie (A).

Mais imaginons avoir procédé à un montage en tous points identiques à droite de l'échantillon. Dans les mêmes conditions, et si la nouvelle source lumineuse est seule en oeuvre, nous avons le phénomène analogue, mais avec inversion des rôles de (A) et (B) ; les schémas a) et b) de la figure 20 montrent les deux dispositions successives.

Si enfin nous utilisons simultanément les deux sources lumineuses, après avoir pris soin de les situer de telle sorte que les plans inférieurs des deux faisceaux soient confondus, nous ferons apparaître comme le représente la figure 20-c, les deux lignes de niveau  $\Delta w = Cte$  sur l'échantillon.

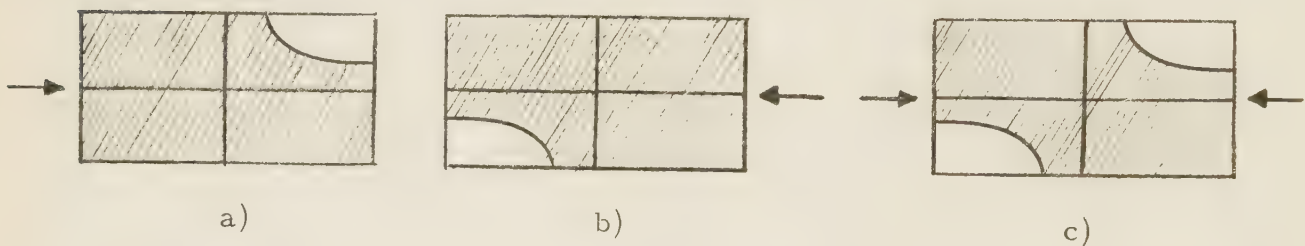


Figure 20

Il suffira alors, pour générer toutes les lignes de niveau de la surface, de faire varier la cote de telle sorte que le double faisceau puisse "balayer" la surface de  $w_m$  à  $w_n$ .

#### 7-4-2 Description du montage

Nous avons réalisé le montage correspondant au schéma de la figure 21 et dont la figure 22 représente le dispositif. Le banc d'optique est symétrique relativement à l'échantillon. Les 2 sources lumineuses sont réglées de façon que les faisceaux soient très légèrement divergents, Les fentes sont placées près des sources. Nous avons ajouté au dispositif de principe deux écrans situés de part et d'autre, et très près de l'échantillon, de sorte que les plans inférieurs soient parfaitement nets. Nous réglons la coïncidence des 2 faisceaux par le procédé suivant ; il s'agit de faire apparaître sur la fente opposée la partie basse du faisceau issu de l'autre lampe, et ceci, de façon que chaque écran effleure le faisceau "opposé" déjà défini par son propre écran .... et réciproquement.

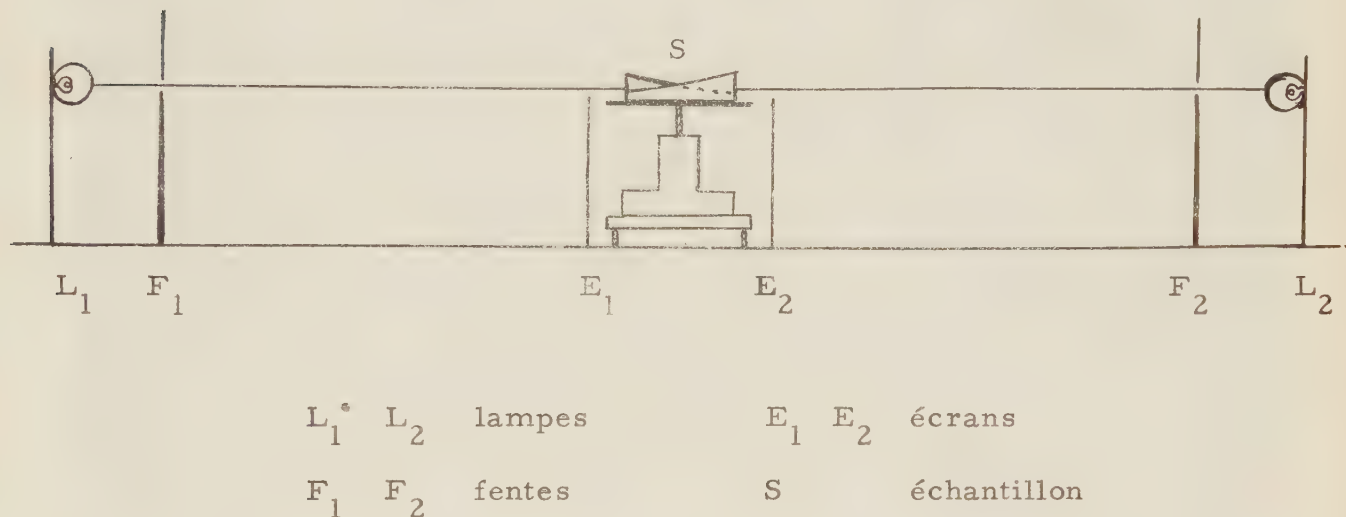


Figure 21

Il reste maintenant à définir le plan de référence de l'échantillon, après que celui-ci ait été placé sur le porte échantillon situé entre les 2 écrans, comme l'indique la figure 23. Le porte échantillon est solidaire d'un trépied à vis. Nous agissons sur celles-ci afin que les 2 cotes minimum, puis les 2 cotes maximum, situées aux quatre extrémités de la surface rectangulaire, apparaissent simultanément. Le moule est alors dans le plan de référence, relativement au plan commun des 2 faisceaux. Il suffit alors de faire varier la cote du porte échantillon pour former toutes les courbes de niveau.

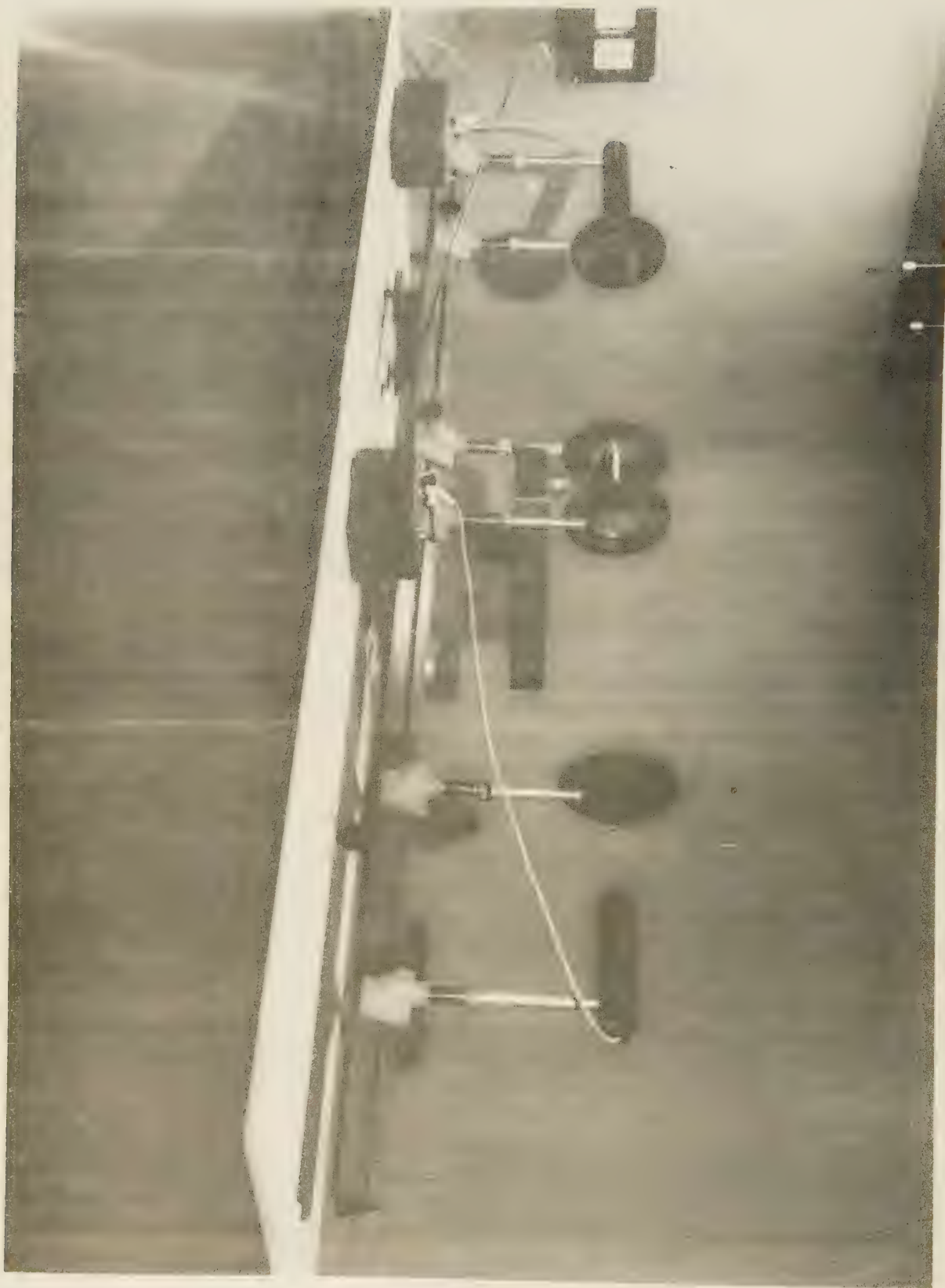


Figure 22

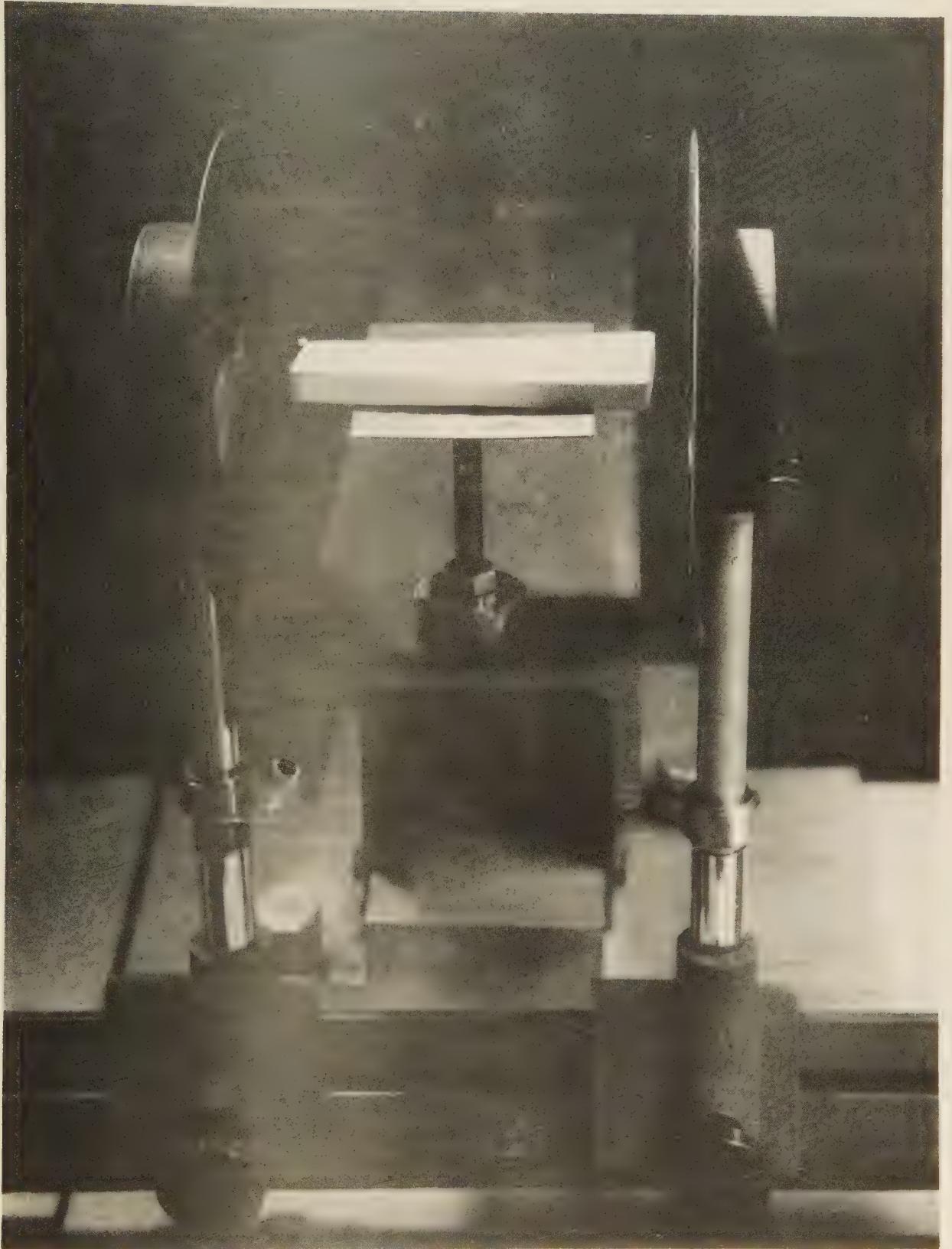


Figure 23

### 7-4-3 Résultats lignes de niveau

Les réglages étant effectués comme il vient d'être indiqué, nous faisons, depuis la position inférieure, augmenter la cote de l'échantillon jusqu'à que l'échantillon soit totalement éclairé.

Les premières lignes définies seront celles correspondant aux  $w = Cte \text{ maximum}$ , les dernières aux  $w = Cte \text{ minimum}$ .

Les figures 24 montrent certaines de ces lignes cotées, photographiées au cours des expériences.

Nous retrouvons les lignes déterminées au comparateur dans le paragraphe précédent. La figure 24-c montre parfaitement le cas limite traduisant les lignes à  $w = 0$ , autrement dit les axes du rectangle. Il est remarquable de constater que les 4 zones sont ainsi très bien explicitées. Dans 24-d, les lignes  $w = - 0,50$  sont identiques théoriquement aux lignes  $w = + 0,50$ . En fait nous constatons que cette similitude est bien respectée.

### 7-4-4 Comparaison des 2 méthodes

La méthode que nous venons d'exposer et d'illustrer est beaucoup plus rapide que celle consistant à faire la topologie de la lecture au comparateur. Contrairement à ce que l'on pouvait penser quant à la netteté de la ligne de séparation des 2 zones du fait que la lumière était rasante, nos clichés montrent que les lignes sont déterminées avec une excellente netteté. Par ailleurs, le côté visuel et directement "concrétisable" par photographie présente un avantage indéniable.

Enfin il est parfaitement possible de faire un montage permettant d'étudier les courbes de niveau sur la section gauchie de la barre elle-même, et non plus par l'intermédiaire d'un moule. Ainsi, ce montage étant réalisé, il permet de déterminer très rapidement le gauchissement, quelle que soit la forme de la section transversale, et aussi, quantitativement de voir la variation de  $w$ , pour un point donné, en fonction de l'angle de torsion.



a



b



c



d

Figure 24

## 7-5 CONCLUSION

Il convient pourtant de noter que les surfaces gauchies que nous avons étudiées au long du présent chapitre ne sont point, en toute rigueur, soumises à la torsion pure. En effet, l'expérimentation s'applique à l'une des extrémités de l'échantillon. La section se trouve ainsi à l'extérieur des couples antagonistes, et très près des forces appliquées. Le phénomène de voutement est de ce fait diminué dans son amplitude. Il peut d'autre part être perturbé par des contraintes parasites. Pourtant nos expériences nous ont montré que, qualitativement, le phénomène était bien celui prévu par la théorie. Cela nous conduit à penser que les tensions perturbatrices sont insignifiantes et que, finalement, les déformations seraient dues exclusivement à la torsion.

## CONCLUSION

Après avoir repris certaines parties de la théorie de l'élasticité linéaire, afin de pouvoir l'appliquer à nos travaux sur la torsion, nous avons résolu, sur calculateur GAMMA - TAMBOUR l'équation

$$\Delta_z \varphi = \text{Cte.}$$

Puis, dans la partie expérimentale, notre étude a porté sur les propriétés mécaniques d'un caoutchouc naturel, pure gomme, c'est-à-dire non renforcé par incorporation de particules solides comme les noirs de carbone, la silice. . . . Nous avons considéré que la matière était macroscopiquement homogène. Pourtant, dans le cas d'échantillons en feuilles, cette caractéristique n'a pas, semble-t-il été vérifiée. Aussi, afin de conserver toute rigueur à notre travail, nous avons été conduits à introduire deux coefficients de Poisson. Il serait sans aucun doute intéressant d'étudier plus précisément de tels milieux hétérogènes, car ces matériaux, formés de macromolécules franchement hétérogènes conduiront à de nouveaux types de substances tels les "polymers organisés" dont la structure est unisotrope.

Dans le problème de la torsion, nous avons, en fin de calculs, fait un recoupement qui s'est avéré excellent et qui nous autorise à penser que la théorie classique est encore applicable dans l'étude de matériaux hyper - élastiques, à condition toutefois de lui apporter certaines modifications.

Par contre, pour ce qui est de l'interprétation des effets, il est nécessaire de se pencher sur le problème de l'analyse structurale de la macromolécule, et sur les propriétés rhéologiques telles que cassure, plasticité, déformation, écoulement. Celles-ci sont l'aboutissement d'un état de fait dont les éléments sont constitués par la nature du corps, l'expérimentateur, les conditions dans lesquelles le corps était placé et l'appareil avec lequel ses propriétés ont été relevées.

## BIBLIOGRAPHIE

### Ouvrages généraux

- (1) - TIMOSHENKO et GOODIER - Théorie de l'élasticité. Librairie Béranger 1954
- (2) - SOKOLNIKOFF - Mathematical theorie of elasticity. 2° édition 1956
- (3) - L'HERMITTE - Essais des matériaux et constructions . Eyrolles 1959
- (4) - SHAW - Introduction to relaxation methods
- (5) - SOUTHWELL - Relaxation methods in Engineering Science 1940
- (6) - CHAUSSIN - Plastiques. Dunod 1961
- (7) - PRAGER - Plasticité théorique. Dunod 1958
- (8) - REINER - Rhéologie théorique. Dunod 1955
- (9) - CALLANDREAU - Résistance des matériaux. 4ème Editions. A. Michel 1962
- (10) - KORGANOFF. J. JOHNSON. LIGNAC - Eléments de calcul numérique  
Bull. Helpe. Paris 1962

### Publications

- (11) - V.J. PARKS and A.J. DURELLI - Exper Mech. USA 2, 37, 1964
- (12) E. DEUTSCH - Stud. Cercl. Mech. Appl. Romin 6, 1615, 1962
- (13) - P. VILLAGGIO - Att. Acad. Luglio Sci. Lettres, 18, 155, 1962
- (14) - F. SALLES - J. FAUCHON - Publication à paraître
- (15) - ROARK - Formulas for strain and stress. J. of Aero. Sc. Oct. p. 485 , 1945
- (16) - RAMBERG and LEVY - J. Of Aero. Sc.; Oct. 1945
- (17) - F. SALLES - Méthode des différences finies . Ministère de l'Air
- (18) - E.J. BLUCKLER - Rubber chemistry and technology, 37, 3, 1964
- (19) - KOTANI FURUKAWA YAMASHITA - Journal of Soci. Rubber ind. Japan , 37, 1964
- (20) - L. MULLINS - Rubber chemistry and technology, 21, 281 , 1948
- (21) - A.F. BLANCHARD and D. PARKISON - Proc. 2nd Rubber Tech. Conf. London  
p. 414, 1948

- (22) - F. BUECHE - Journal of applied Sciences, 4, 107, 1960
- (23) - J.R. TAYLOR and S.R. DARIN - Journal polymer Science, 17, 511, 55
- (24) - P.J. FLORY - Principle of polymer chemistry, p. 482, CUP Ithaca, NY, 1953
- (25) - P.J. FLORY - Chem. Rev. 35, 44, 1964
- (26) - W. COOPER - J. Polymer Sci. , 28, 195, 1958
- (27) - H.P. BROWN - Rubber Chem. tech. 36, 931, 1963
- (28) - R.S. STEARNS and B.L. JOHNSON - Ind. Eng. Chem. 43, 146, 1951
- (29) - B.M.E. Van der HOFF - Polymer Corporation, 1964 (Communication privée)
- (30) - P. THIRION et R. CHASSET - Revue générale des Caoutchoucs, 41, 273, 1964
- (31) - JR. DUNN, J. SCANLAN, W.F. WATSON - Trans. Faraday Soc. 54, 730, 1958
- (32) - Le FOLL - Revue générale des Caoutchoucs, 30, 559, 1953
- (33) - W. SCHEELE and K.H. HILLMER - Kant. u. Gummi 9, (4), 84, W.T. , 1956
- (34) - J.D. FERRY - Viscoelastic properties of Polymer, 1° Ed., p. 294, 1960
- (35) - P.J. BLATZ and WILLIAM L. KO - Transactions of the Soc. Rheology, 6, 1962
- (36) - A.R. PAYNE - Rubber and Plastics Research Association. R.G.C. 41, (3), 1964
- (37) - A.R. PAYNE - Rubber Plastic Age, 42, 963, 1961
- (38) - BLATZ and WILLIAM L. KO - Transaction of the Soc. Rheology, 6, 1962

TABLE DES MATIERES

|                                                                                                    | Pages |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Introduction                                                                                       | 1     |
| <u>Chapitre I</u> - Rappels et théorèmes généraux de l'élasticité                                  | 3     |
| <u>Chapitre II</u> - Etude théorique de la torsion                                                 | 7     |
| <u>Chapitre III</u> - Résolution numérique de l'équation                                           |       |
| A) Position du problème. Méthode de résolution<br>sur machine BULL, type GAMMA-TAMBOUR             | 19    |
| B) Résultats se rapportant à une section elliptique                                                | 27    |
| C) Résultats se rapportant à une section rectangu-<br>laire                                        | 34    |
| <u>Chapitre IV</u> - Essais de traction. Détermination du module<br>d'Young                        | 39    |
| <u>Chapitre V</u> - Etude du cisaillement. Détermination du coefficient<br>de Poisson. Calcul de G | 59    |
| <u>Chapitre VI</u> - Etude de la torsion                                                           | 75    |
| <u>Chapitre VII</u> - Torsion de barres à section rectangulaire<br>Etude du gauchissement          | 93    |
| Conclusion                                                                                         | 107   |
| Bibliographie                                                                                      | 109   |



Vu :

Les membres du Jury,

MM. C. EYRAUD  
F. SALLES  
M. CHEVRETON  
J. GOLÉ

Vu et approuvé :

Le Doyen de la Faculté des Sciences ;

J. BRACONNIER

Vu et accordé le permis d'imprimer :

Lyon, le 12 Juillet 1965 .

Le Recteur ,

Président du Conseil de l'Université :

P. LOUIS





